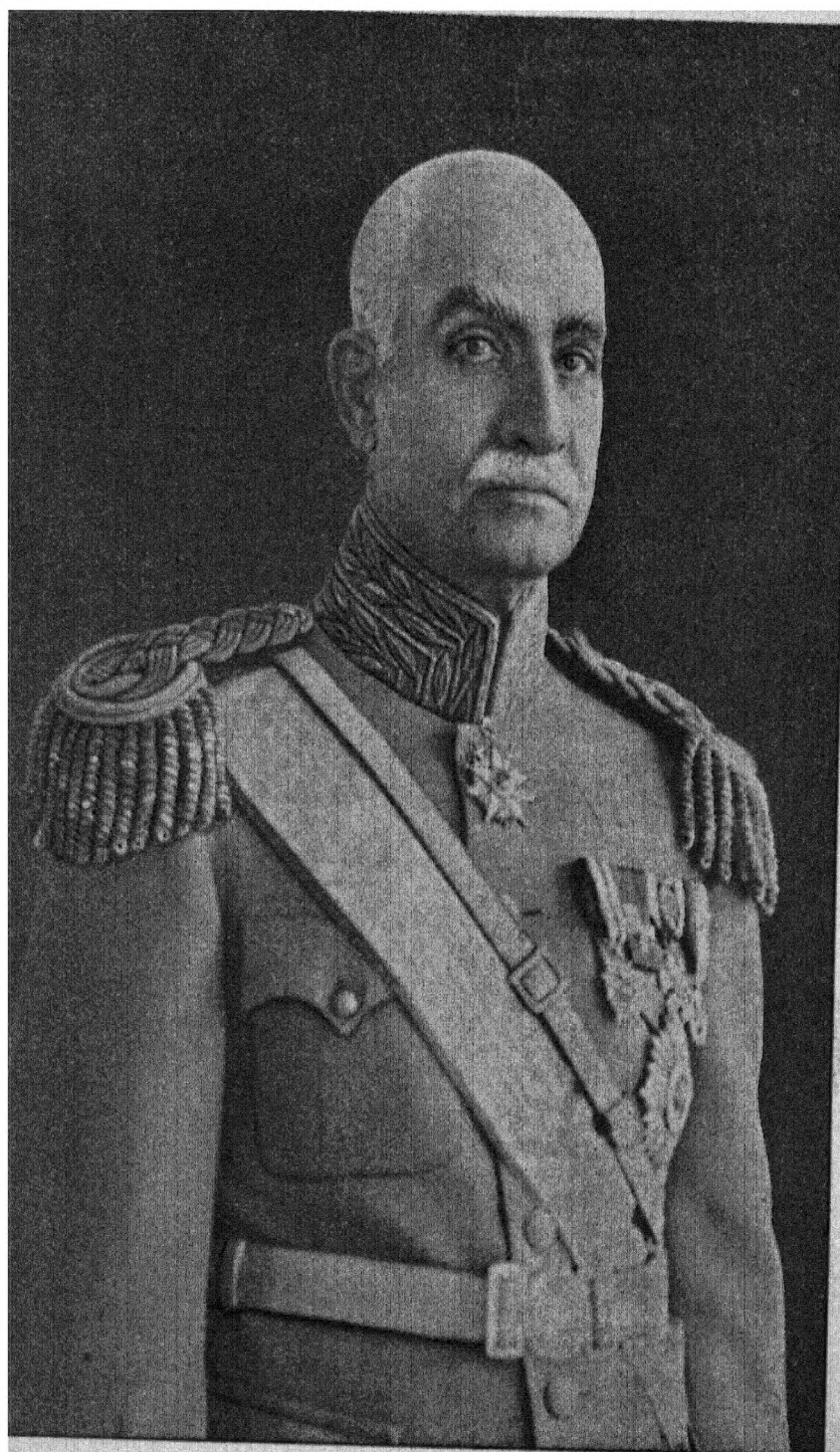


UNIVERSAL
LIBRARY

OU_228998

UNIVERSAL
LIBRARY





توانا بود مسرکه دانا بود

وزارت فرهنگ

مجلات

برای سال پنجم دبیرستانها

حق چاپ و جعظ

۱۳۲۰

چاپخانه ایران

آغاز

در این عصر خجسته که اراده خرد و نه شانه شاه دانش در آید حضرت رضا شاه پهلوی
و توجهات حکیمانه والا حضرت بهایون و لا یتعبد تبوسع و ترقی علوم و فنون و
رفع هر گونه نقص و اختلاف و دشمن اجتماعی کشور معطوف است، وزارت فرهنگ
لازم دانست که برنامه آموزشگاهها را با این منظور عالی کاملاً موافق نماید، نخست صلاح
برنامه تحصیلات متوسطه پرداخت، و چون اجراء برنامه بی اصلاح کتب درسی نبود
بنود در تاریخ ۲۷ مهر ماه ۱۳۱۲ تصویب نامه از هیئت وزیران گذرانید که نگارش
کتب دبیرستانی را بر بستن حد و داشتن شرایط لازم ایجاب میکرد، و بموجب آن
هیئتی از استادان و دانشیاران و دبیران که پیشینه تالیف و تدریس داشتند
بنام کمیسیون تهیه و چاپ کتب برگزیده شد تا برای انجام این امر مقدماتی
وضع کنند که همه کتب دبیرستانی بر طبق یک اسلوب مطلوب و موافق با اصول
آموزش و پرورش نگارش یافته علاوه بر مواد علمی و ادبی مؤید خصال ملی و ملکات را
یاشد که از عهد باستان سرشته نهاد ایرانیان بوده، مانند میهن پرستی و شاه دوستی

در است کفاری و درست کرداری و دیگر صفات و اخلاق نیکو که منظور اصلی از
بر تعلیم و تربیت میباشد .

پس پیشنهاد این کمیسیون تألیف کتاب درسی هر یک از مواد برنامه بحدث
از کسانی که آرموده و شایستگی داشتند ارجاع شد .

اینک کتاب مثلثات برای سال پنجم دبیرستانها که تألیف آن به :

اتاقی محمد وحید مدیر کل وزارت فرهنگ

اتاقی تقی فاطمی استاد دانشگاه

و گذار شده بود از طرف وزارت فرهنگ منتشر میشود که در همه دبیرستانها
پسران و دختران کشور منحصرأ تدریس شود .

وزیر فرهنگ

بهمن

بخش نخست

مراجعة درس نهمی پیش

۱- پیش از شروع برنامه امسال دستورالعمل‌های مهم مثلثاتی را که سال پیش خوانده ایم از نو یادآوری می‌نمایم .
این دستورالعمل‌ها طوری باید آموخت که در بکار بردن آنها هیچ تردیدی نباشد و در هر مسئله بدانیم که امیکت از آنها باید بکار برده شود:

دستورالعمل اتحادهای مهم

دستور تبدیل یک‌های کمان یکدیگر α اندازه کمان بحسب ادیان - n
و n' اندازه آن تریب بازینه و گراد):

$$(1) \quad \frac{\alpha}{n} = \frac{n}{180} = \frac{n'}{900}$$

بستگی‌های میان پردازشهای مثلثاتی یک کمان (یا یک گوشه):

$$(۲) \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$(۳) \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$(۴) \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$(۵) \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$(۶) \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$$

جدول خطای مثلثاتی برخی از کمانها (یا گوشه ها)

۹۰° یا $\frac{\pi}{2}$	۶۰° یا $\frac{\pi}{3}$	۴۵° یا $\frac{\pi}{4}$	۳۰° یا $\frac{\pi}{6}$	۰° یا ۰	A
۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	$\sin A$
۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	$\cos A$
∞	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	$\operatorname{tg} A$
۰	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۱	$\sqrt{3}$	∞	$\cot A$

اندازه جبری کمانهای که سترانه‌دار A و شبه‌انه‌دار M است :

$$(۷) \quad \begin{cases} \widehat{AM} = \alpha + 2K\pi \\ \widehat{AM} = n^\circ + K \cdot 360^\circ \\ \widehat{AM} = n'^\circ + K \cdot 400^\circ \end{cases}$$

(α را دیان و n زینه و n گراد اندازه جبری کی از گمانهای AM است
و k عدد درست)

اندازه جبری گوشه میان دو نیم خط یابد و آنسه (ox پهلوی نخست و
 oy پهلوی دوم گوشه) :

$$(7) \quad \begin{cases} (ox, oy) = \widehat{xoy} = \alpha + 2k\pi \\ (ox, oy) = \widehat{xoy} = n + k \cdot 360^\circ \\ (ox, oy) = \widehat{xoy} = n^\circ + k \cdot 40^\circ \end{cases}$$

گمانهای که یکی از پر دازشهای مثلثاتی آنها داده شده است.

$$\sin x = \sin \alpha \quad \text{اگر داشته باشیم}$$

یعنی اگر گوشه ای باشد α بناسیم که سینوس آن برابر سینوس گوشه x باشد خواهیم داشت:

$$(8) \quad \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} \quad \text{و با}$$

$$\cos x = \cos \alpha \quad \text{اگر داشته باشیم}$$

$$(9) \quad x = \pm \alpha + 2k\pi \quad \text{خواهیم داشت:}$$

اگر داشته باشیم $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$

(۱۰) $x = \alpha + K\pi$ خواهیم داشت :

و اگر داشته باشیم $\cot x = \cot \alpha$

(۱۱) $x = \alpha + K\pi$ خواهیم داشت :

یعنی عبارت دیگر :

(۸) $\operatorname{arc} \sin(\sin \alpha) = \begin{cases} \alpha + 2K\pi \\ \pi - \alpha + 2K\pi \end{cases}$

(۹) $\operatorname{arc} \cos(\cos \alpha) = \pm \alpha + 2K\pi$

(۱۰) $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha + K\pi$

(۱۱) $\operatorname{arc} \cot(\cot \alpha) = \alpha + K\pi$

$[\operatorname{arc} \sin(\sin \alpha)]$ با α کوچک (یعنی کمائی که سینوس آن برابر سینوس α است)

تجسره - غرض $\operatorname{arc} \sin \alpha$ (بزرگ) کمائیست α میان 90° -

و 90° که سینوس آن برابر α باشد :

(۸)' $\operatorname{Arc} \sin \alpha = \alpha \quad -90^\circ < \alpha < +90^\circ$

همچنین $A_{2c} \cos \alpha$ کانیست میان 0° و 180° که سینوس متمم آن α باشد

$$(9) \quad 0^\circ \leq A_{2c} \cos \alpha \leq 180^\circ$$

همچنین $A_{2c} \operatorname{tg} \alpha$ کانیست میان -90° و $+90^\circ$ که تانژانت آن α باشد

$$(10) \quad -90^\circ \leq A_{2c} \operatorname{tg} \alpha \leq +90^\circ$$

همچنین $A_{2c} \cot \alpha$ کانیست میان 0° و 180° که تانژانت متمم آن α باشد

$$(11) \quad 0^\circ \leq A_{2c} \cot \alpha \leq 180^\circ$$

بشکلی میان خط‌های مثلثاتی ترحمی از کمانها (یا گوشه‌ها)
الف - کمانهای منکمل - دو کمان کل دارای یک سینوس می‌باشند ولی دیگر
خط‌های مثلثاتی آنها قرینه یکدیگرند :

$$(12) \quad \begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha \end{cases}$$

ب - کمانهای قرینه - دو کمان قرینه دارای یک سینوس متمم می‌باشند ولی دیگر

خطای مثلثاتی آنها عددی می باشد قرینه یکدیگر:

$$(۱۳) \quad \begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{cot}(-\alpha) = -\operatorname{cot} \alpha \end{cases}$$

۷- کمانهائی که تفاضل آنها برابر π است - تنازنت این کمانهادر

همچنین تنازنت متمم آنها یکی است ولی سینوس آنها قرینه یکدیگرند و همچنین سینوس متمم

$$(۱۴) \quad \begin{cases} \sin(x + \pi) = -\sin x \\ \cos(x + \pi) = -\cos x \\ \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x \\ \operatorname{cot}(x + \pi) = \operatorname{cot} x \end{cases} \quad \text{انها:}$$

۸- کمانهائی متمم - چنانکه از نام خطای مثلثاتی هم برمیآید داریم:

$$(۱۵) \quad \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cot} x \\ \operatorname{cot}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

هـ- کمانهائی که تفاضل آنها برابر یک چهارم پیرامون است:

$$(۱۶) \left\{ \begin{array}{l} \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \cos x \\ \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = -\sin x \\ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = -\cot x \\ \cot \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = -\operatorname{tg} x \end{array} \right.$$

خلاصه - بطور کلی اگر x را مضرب حقیقی از ۹۰° بگیریم یا از آن کم کنیم کمانی بدست میآید که خطهای مثلثاتی آن بهنام خطهای مثلثاتی x میباشد - و اگر x را به مضرب تاقی از ۹۰° بگیریم یا از آن کم کنیم خطهای مثلثاتی کمان حاصل بهنام خطهای مثلثاتی متمم x خواهد بود.

برای بدست آوردن نشانه کافی است x را میان ۰° و ۹۰° بگیریم و ببینیم آیا جای تیره کمان حاصل روی چه بخشی از پیرامون دایره مثلثاتی است مثلاً بفرض اینکه x میان ۰° و ۹۰° باشد $x - ۲۷۰^\circ$ کافی است که تیره آن در بخش سوم میافتد پس سینوس متمم آن منفی است بنابراین:

$$\cos(۲۷۰^\circ - x) = \cos(۳ \times ۹۰^\circ - x) = -\sin x$$

بهمین

$$\sin(-180^\circ + x) = \sin(-2 \times 90^\circ + x) = -\sin x$$

پردازش های مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو کمان (یا دو گوشه)

$$(۱۷) \quad \cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$(۱۸) \quad \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$(۱۹) \quad \sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$(۲۰) \quad \sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$(۲۱) \quad \operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$(۲۲) \quad \operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

پردازش های مثلثاتی یک کمان از روی پردازش های مثلثاتی نیمه آن

کمان - (۲a از روی a)

$$(۲۳) \quad \sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$(۲۴) \quad \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

$$(۲۵) \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

توان دوم سینوس و سینوس متمم یک کمان از روی سینوس متمم کمان

دو برابر.

$$(۲۶) \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$(۲۷) \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

عبارت پردازش نامی مثلثاتی a بحسب $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ گویاست:

$$(۲۸) \quad \sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

$$(۲۹) \quad \cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

$$(۳۰) \quad \operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

کشایش سه برنامی راست گوشه - C گوشه راست c وتر a و b

پهلوی روبرو گوشه های تند A و B

$$(۳۱) \quad c^2 = a^2 + b^2$$

$$(۳۲) \quad A + B = 90^\circ$$

$$(۳۳) \quad \sin A = \frac{a}{c} = \cos B$$

$$(۳۴) \quad \cos A = \frac{b}{c} = \sin B$$

$$(۳۵) \quad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \cot B$$

تصویرهای - قضیه ۱- تصویر راست کذریک بردار روی یک آسه برابر است با حاصل ضرب اندازه جبری بردار در سینوس متمم گوشه میان آسه ای که بردار روی آنست و آسه تصویر.

قضیه ۲- تصویر برآیند دو (یا چند) بردار روی یک آسه برابر است با حاصل جمع جبری تصویرهای آن دو (یا چند) بردار روی همان آسه.

پرسش های ساده شفاهی

۱- آیا $\sin 45^\circ = \sin 45^\circ$ بزرگتر است یا $\frac{1}{4} \sin 90^\circ$ ؟ $\sin 60^\circ$

۲ $\sin 30^\circ$ ؟ $\cos 30^\circ$ یا $\cos 60^\circ$ ؟ $\frac{1}{4} \cos 60^\circ$ ؟ $\operatorname{tg} \frac{7}{6}$ یا $\cot \frac{7}{4}$ ؟

۲- بفرض اینکه $\frac{1}{4} \sin \alpha = \sin \alpha$ باشد حساب کنید $\cos \alpha$ و $\operatorname{tg} \alpha$ را.

۳- این برابر یا اثبات کنید:

$$\operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \cot 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ \cos 45^\circ = \cos 30^\circ \sin 90^\circ$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x$$

$$\cot x \cdot \sin x = \cos x$$

$$\frac{1 - \tan^2 3^\circ}{1 + \tan^2 3^\circ} = \cos 6^\circ = \frac{1}{4} \cos 0^\circ$$

$$(\tan x + \cot x) \sin x \cdot \cos x = 1$$

$$\sin 3^\circ \cdot \cos 6^\circ + \cos 3^\circ \cdot \sin 6^\circ = \sin 9^\circ$$

۴- بفرض اینکه $D = 6^\circ$, $C = 45^\circ$, $B = 3^\circ$, $A = 0^\circ$

$E = 9^\circ$ باشد حاصل عبارت زیر چیست؟

$$(\sin B + \sin E)(\cos A + \cos D) - 4 \sin A (\cos C + \sin E)$$

۵- تیرگان x در چه بخشی از دایره است برگاه

$\sin x$, $\cos x$ هر دو منفی باشند؟

$\sin x$ مثبت و $\cos x$ منفی باشد؟

$\tan x$, $\cot x$ هر دو مثبت باشند؟

۶- آیا مکانی هست که تاثرات آن مثبت و تاثرات متمم آن منفی باشد؟

۷- از عدد های زیر

3 , $-\frac{1}{3}$, a , b , $-\infty$, ∞ , 0 کدام می تواند برابر $\sin x$ باشد و کدام

برابر x tg ؟

۸- اندازه گانهای زیر چیست ؟

$$\text{Arc tg } \sqrt{3}$$

$$\text{arc tg } \sqrt{3}$$

$$\text{Arc cos } 0$$

$$\text{arc cos } 0$$

$$\text{Arc cos } \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{arc cos } \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Arc sin } 0$$

$$\text{arc sin } 0$$

$$\text{Arc tg } 1$$

$$\text{arc tg } 1$$

$$\text{Arc cot } (-\sqrt{3})$$

$$\text{arc cot } (-\sqrt{3})$$

$$\text{Arc cos } -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{arc cos } -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Arc sin } -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{arc sin } -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Arc sin } -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{arc sin } -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Arc tg } (-1)$$

$$\text{arc tg } (-1)$$

۹- برابر هر یک از پر دازشهای زیر را بگوئید:

$$\sin (\text{arc sin } x)$$

$$\cos (\text{arc cos } x)$$

$$\cot(\operatorname{arccot} x)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$$

$$\cos(\operatorname{arctg} \infty)$$

$$\operatorname{tg}[\operatorname{arccos}(-1)]$$

$$\cos(\operatorname{arcsin} 0)$$

$$\cos(\operatorname{Arccos} 0)$$

$$\sin[\operatorname{arctg}(-1)]$$

$$\sin(\operatorname{arccos} 1)$$

۱۰- در چند دقیقه عقرب دقیقه شمار $\frac{3\pi}{4}$ - را دیان خواهد گشت؟

۱۱- در ۳۴ دقیقه و ۳۷،۵ ثانیه عقرب ساعت شمار چه گوشه ای می پیماید؟

ورزش

درستی اتحاد های زیر را بررسی نمایند:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \sin x \quad (1)$$

$$\frac{\cos a}{1 + \sin a} + \frac{1 + \sin a}{\cos a} = \frac{2}{\cos a} \quad (2)$$

$$\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a} = 1 + \frac{2 \cos a (1 + \cos a)}{\sin^2 a} \quad (3)$$

$$\frac{\cot x}{\sin x} = \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x} \quad (4)$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = 1 - 2 \cos^2 x \quad (5)$$

$$(1 - \sin x) \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right) = \cos x \quad (6)$$

$$(1 - \operatorname{tg} y)(1 - \cot y) = 2 - \frac{1}{\sin y \cos y} \quad (17)$$

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^2 x} \cdot \cos x = \frac{1}{1 + \cos x} \quad (18)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \quad (19)$$

$$(\operatorname{tg} \alpha + \cot \alpha)^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (20)$$

$$\frac{\cos x \cdot \operatorname{tg} x}{\sin^2 x} \sin x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \quad (21)$$

$$\frac{\cot \alpha - \operatorname{tg} x}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} \quad (22)$$

$$\left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cot \alpha} \right) \sin \alpha \cdot \cos \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \quad (23)$$

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \quad (24)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^{2m-2} x} = \frac{1}{\cos^{2m-2} x} \cdot \operatorname{tg}^2 x \quad (25)$$

$$\operatorname{tg} x - 2 \cot x + \operatorname{tg} x (1 + 2 \cot^2 x) = 2 \operatorname{tg} x \quad (26)$$

$$\frac{a \cdot \sin \alpha \cdot \cos x - b \sin x \cdot \cos x}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} = \frac{(a - b) \operatorname{tg} x}{a \operatorname{tg}^2 x + b} \quad (27)$$

$$b - \frac{a(a \cos x - b \sin x)}{a \sin x + b \cos x} = \frac{a^2 + b^2}{a \operatorname{tg} x + b} \quad (28)$$

$$\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - x + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2 x \quad (29)$$

پانزدهم: بیانی زیر را که میان α و β می باشد بدست آورید:

$$[۳۱۵^\circ, ۲۲۵^\circ, ۱۳۵^\circ, ۴۵^\circ : \text{بخ}] \quad \text{tg}^2 x = 1 \quad (۲۰)$$

$$\sin^2 x = \frac{3}{4} \quad (۲۱)$$

$$(\text{tg}^2 x - 3)(1 - 2 \sin x) = 0 \quad (۲۲)$$

$$\sqrt{2} \text{tg} x \cdot \sin x - \text{tg} x = 0 \quad (۲۳)$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \cot^2 x = 1 \quad (۲۴)$$

$$2 \sin^2 x + \sin x = 1 \quad (۲۵)$$

$$(4 \sin^2 x - 3)(3 \sin^2 x - 4) = 0 \quad (۲۶)$$

$$2 \cos^2 x = 5(1 - \sin x) \quad (۲۷)$$

درستی اتحادهای زیر را بررسی نمایید:

$$\text{Arc sin}(2a\sqrt{1-a^2}) = 2 \text{Arc sin} a \quad (۲۸)$$

(پسندانی: اگر $\text{Arc sin} a$ را x بنامیم یعنی $\sin x = a$ باید ثابت کنیم که

$$\text{Arc sin}(2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x}) = 2x$$

و یا (چون دوگان برابر دارای یک پهنوس میباشند)

$$2 \sin x \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sin 2x \quad (۲۹)$$

و چون $x = \text{Arc sin } a \Rightarrow \frac{\pi}{2} > x$ پس: $\sqrt{1 - \sin^2 x} = + \cos x$ و باید ثابت کرد که

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x \quad \text{و این ثابت است}$$

$$2 \text{Arc cot } x = \text{Arc tg } \frac{2x}{x^2 - 1} \quad (۳۰)$$

$$2 \text{Arc cos } x = \text{Arc sin } 2x \sqrt{1 - x^2} \quad (۳۱)$$

$$\text{Arc cot } x = \text{Arc cos } \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \quad (۳۲)$$

$$\text{Arc sin } x = \text{Arc sin } (3x - 4x^3) \quad (۳۳)$$

$$x = \text{Arc cos } \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 x}}$$

$$(۳۴) \text{ حساب کنید عبارت } \text{Arc tg } \frac{1}{4} + \text{Arc tg } \frac{1}{3}$$

را بنمایانید. اگر $\text{Arc tg } \frac{1}{4}$ و $\text{Arc tg } \frac{1}{3}$ را ترتیب α و β در بنامیم برای حساب.

کردن $\alpha + \beta$ قبلاً تا اثرات آنرا بدست میآوریم (زیرا $\text{tg } \alpha$ و $\text{tg } \beta$ داده شده است)

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{12}} = 1$$

$$\alpha + \beta = \text{Arc tg } 1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{پس}$$

برستی برابرهای زیر را بررسی نمایید:

$$\text{Arc tg } \frac{1}{3} - \text{Arc tg } (-1) = \text{Arc tg } 2 \quad (۳۵)$$

$$\text{Arc tg}(\sqrt{2}+1) - \text{Arc tg}(-\sqrt{2}-1) = 135^\circ \quad (۳۶)$$

$$\text{Arc tg} \sqrt{3} - \text{Arc tg}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \text{Arc tg}(-3\sqrt{3}) \quad (۳۷)$$

$$\text{Arc} \frac{a+b}{a-b} - \text{Arc tg} \frac{b+a}{b-a} = \text{Arc tg} \frac{b^2-a^2}{2ab} \quad (۳۸)$$

$$\text{Arc tg}(\frac{-m^2}{n^2}) - \text{Arc tg} \frac{n^2}{m^2} = -\frac{\pi}{2} \quad (۳۹)$$

$$\text{Arc tg} 3 - \text{Arc tg} \frac{-1}{3} = \frac{\pi}{2} \quad (۴۰)$$

$$\text{Arc tg} \frac{2b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2} = 2 \text{Arc sin} \frac{b}{a} \quad (۴۱)$$

$$\text{Arc sin} x + \text{Arc cos} y = \text{Arc tg} \frac{xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}} \quad (۴۲)$$

$$\text{Arc sin} x + \text{Arc sin} y + \text{Arc sin} z = \text{Arc sin} \left[x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-z^2)} + z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xyz \right] \quad (۴۳)$$

بفرض اینکه a و b دو گوشه تند (یا دو کمان مثبت و کوچکتر از 90°) باشند و هر یک از حالت های زیر سینوس و سینوس متمم و تانژانت $a+b$ و $a-b$ را حساب کنید

$$\cos b = \frac{2}{3} \quad \sin a = \frac{1}{3} \quad (۴۴)$$

$$\cos b = \frac{5}{13} \quad \sin a = \frac{3}{5} \quad (۴۵)$$

$$\cot b = \frac{5}{3} \quad \text{tg} a = \frac{3}{4} \quad (۴۶)$$

بفرض اینکه گوشه‌های α و β و $\alpha + \beta$ تند باشند و هر یک از حالت‌های زیر سینوس و سینوس متمم و تانژانت α را حساب کنید:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{4} \quad \sin \beta = \frac{1}{4} \quad (47)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{4} \quad \sin \beta = \frac{1}{4} \quad (48)$$

(49) سینوس 12° را از روی خط‌های مثلثاتی 3° و 9° حساب کنید

همچنین سینوس متمم 135° را از روی خط‌های مثلثاتی 45° و 180°

عبارت‌های زیر را بحسب خط‌های مثلثاتی α بنویسید:

$$\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) \quad \sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) \quad (50)$$

$$\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) \quad (51)$$

دستی‌اتحاد‌های زیر را بررسی نمایید:

$$\cos(x - \frac{\pi}{6}) - \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \sin x \quad (52)$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) + \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sin x \quad (53)$$

$$\cos(x+y)\cos(x-y) + \sin(x+y)\sin(x-y) = 1 - 2\sin^2 y \quad (54)$$

$$\frac{\tan(\frac{\pi}{4} + x)}{\tan(\frac{\pi}{4} - x)} = \frac{(1 + \tan x)^2}{(1 - \tan x)^2} \quad (55)$$

$$\cos(x+y)\cos y - \cos(x+z)\cos z \quad (56)$$

$$= \sin(x+z)\sin z - \sin(x+y)\sin y$$

(57) خطای مشتاتی ۳۰ و ۶۰ را حساب کنید.

دستی‌اتحادهای زیر را بررسی نمایید:

$$\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = \tan(45^\circ - x) \quad (58)$$

$$4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \cos^2 2x \quad (59)$$

$$\cos^2 x = \cos 2x + \sin^2 x \quad (60)$$

$$\cos 4x = 1 - 1 \sin^2 x \cdot \cos^2 x \quad (61)$$

$$1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2 \quad (62)$$

$$\frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \quad (63)$$

$$\frac{\cos 2x}{\sin x} - \frac{\sin 2x}{\cos x} = 2 \cos 2x \cdot \cot 4x \quad (64)$$

$$\frac{\cos 2x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\cos x} = 2 \cot 2x \quad (65)$$

$$\sin 2x = \frac{2 \cot x}{1 + \cot^2 x} \quad (66)$$

$$\left(\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} \right) \sin x = 2 \quad (67)$$

$$\frac{\tan x + \sin x}{1 + \tan x} = \cos x \quad (91)$$

$$\cot x - \tan x = 1 \cot 2x \quad (99)$$

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = 1 \quad (100)$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \tan x \quad (101)$$

$$1 \sin x \cdot \cos x + 1 \cos x \cdot \sin x = \sin 2x \quad (102)$$

$$1 (\cos^2 x + \sin^2 x) = 1 - \sin^2 2x \quad (103)$$

بخش دوم

جدولهای لگاریتمی خطای مثلثاتی

وراه بکار بردن آنها

۱- در آغاز کتاب مثلثات سال چهارم شماره ۱۲ گفتیم که چون محاسبه خطای مثلثاتی همه کانهای (یا گوشه ها) آسان نیست بنابراین جدولهای مرتب داده اند که از بعضی از آنها (مانند جدول آخر کتاب) نامبرود خطهای مثلثاتی کانهای بدست میآید. در برخی دیگر لگاریتم خطهای مثلثاتی کانهای نوشته شده است.

چون معمولاً محاسبه های مثلثاتی لگاریتم خطای مثلثاتی بکار میرود بایستی بخوبی راه بکار بردن جدولهای لگاریتم خطهای مثلثاتی را فرا بگیریم.

۲- جدولهای که معمولاً بکار برده میشوند پنج سطر است و در آن لگاریتم خطهای مثلثاتی کانهای گوشه های از ۰ تا ۹۰ دقیقه بدقیقه پنج سطر و بکمان نوشته اند. بوسیله این جدولها میتوان دو مسئله زیر را کشود:

الف- کمانی درست است و میخواهیم لگاریتم کلی از خطهای مثلثاتی آن را بشناسیم

ب. لگارتیم کی از خط های مثلثاتی مکان ناشناسی درست است و میجویم

آن مکان را بشناسیم.

ما در ضمن گشودن این دو مسئله و از روی چند مثال عددی راه بکار بردن جدول های

لگارتیم پنج پیکری را نشان میدهم:

۳- جدولی که در صفحه های ۲۴ و ۲۵ ازین کتاب دیده میشود و نویسی است

از دو صفحه از یک جدول لگارتیم پنج پیکری (جدول دپویی^(۱)) که برای نمونه آورده ایم.

دشاهستانی که این نمونه با نسخه اصلی دارد فارسی بودن آنست و بنا برین از راست به

نوشته شده است.

چنانکه می بینیم: بالای این دو صفحه شماره زین (۳۷) نوشته شده و پایین آن

زین ۵۲

در طرف راست صفحه نخست ستونیت که در آن شماره دقیقه از بالا بپایین از ۳ تا ۶

نوشته شده

و در طرف راست صفحه دوم از بالا بپایین از ۳ تا ۶ نوشته شده

و نیز در طرف چپ صفحه دوم ستون نیست که در آن شماره دقیقه های از پائین بالا از ۳ تا ۶ نوشته شده

نخست از ۳ تا ۶

دقیقه های ستون سمت چپ بر صفحه با دقیقه های ستون سمت راست همان صفحه

دو بد و در یک سطر نوشته شده بطوریکه مجموع بر یک از دقیقه های یکی از ستونهای سمت

راست با دقیقه روبروی آن در ستون سمت چپ برابر ۶ است. بنابراین مجموع

زین بالا ای صفحه با یکی از دقیقه های ستون سمت راست آن صفحه مثلاً ۲۵ متمم مجموع

زین پائین صفحه است با دقیقه ۳۵ از ستون سمت چپ

$$۳۷' ۲۵' + ۵۲' ۳۵' = ۹۰'$$

برگاه گوشه یا کمان از ۴۵ کوچکتر باشد شماره زینهای آن در بالای صفحه و شماره دقیقه های

آن در نخستین ستون سمت راست صفحه (از بالا پائین) نوشته شده و برگاه از ۴۵

بزرگتر باشد شماره زینهای آن در پائین صفحه و دقیقه های آن در نخستین ستون سمت چپ

صفحه (از پائین بالا) نوشته شده است.

لگاریتم خط های مثلثاتی کمانهای کوچکتر از ۴۵ در ستونهایست که بالای

آنها نوشته شده است «سینوس» «تانژانت» «تانژانت میثم» و یا

۱	D	سینوس منقسم	تأثرات منقسم	D	تأثرات	D	سینوس	۱
۶۰	۱۰	۹۰.۲۳۵	۰.۱۲۲۸۹	۲۷	۷۷۱۱	۱۷	۷۷۹۴۶	۵
۵۹	۹	.۲۳۵	۲۲۶۲	۲۶	۷۷۳۸	۱۷	۷۹۶۳	۱
۵۸	۱۰	.۲۱۶	۲۲۳۶	۲۶	۷۷۶۳	۱۷	۷۹۸۰	۲
۵۷	۹	۲.۰۶	۲۲۱۰	۲۶	۷۷۹۰	۱۷	۷۹۹۷	۳
۵۶	۱۰	.۱۹۷	۲۱۸۳	۲۷	۷۸۱۷	۱۶	۸۰۱۳	۴
۵۵	۹	.۱۸۷	۲۱۵۷	۲۶	۷۸۴۳	۱۷	۸۰۳۰	۵
۵۴	۱۰	.۱۷۸	۲۱۳۱	۲۶	۷۸۶۹	۱۷	۸۰۴۷	۶
۵۳	۹	.۱۶۸	۲۱۰۵	۲۶	۷۸۹۵	۱۶	۸۰۶۳	۷
۵۲	۱۰	.۱۵۹	۲۰۷۸	۲۷	۷۹۲۲	۱۷	۸۰۸۰	۸
۵۱	۱۰	.۱۴۹	۲۰۵۲	۲۶	۷۹۴۸	۱۷	۸۰۹۷	۹
۵۰	۹	.۱۳۹	۲۰۲۶	۲۶	۷۹۷۴	۱۶	۸۱۱۳	۱۰
۴۹	۱۰	.۱۳۰	۲۰۰۰	۲۶	۸۰۰۰	۱۷	۸۱۳۰	۱۱
۴۸	۹	.۱۲۰	۱۹۷۳	۲۶	۸۰۲۷	۱۶	۸۱۴۷	۱۲
۴۷	۱۰	.۱۱۱	۱۹۴۷	۲۶	۸۰۵۳	۱۶	۸۱۶۳	۱۳
۴۶	۱۰	.۱۰۱	۱۹۲۱	۲۶	۸۰۷۹	۱۷	۸۱۸۰	۱۴
۴۵	۹	.۰۹۱	۱۸۹۵	۲۶	۸۱۰۵	۱۷	۸۱۹۷	۱۵
۴۴	۱۰	.۰۸۲	۱۸۶۹	۲۷	۸۱۳۱	۱۶	۸۲۱۳	۱۶
۴۳	۹	.۰۷۲	۱۸۴۲	۲۶	۸۱۵۸	۱۷	۸۲۳۰	۱۷
۴۲	۱۰	.۰۶۳	۱۸۱۶	۲۶	۸۱۸۴	۱۷	۸۲۴۶	۱۸
۴۱	۱۰	.۰۵۳	۱۷۹۰	۲۶	۸۲۱۰	۱۷	۸۲۶۳	۱۹
۴۰	۹	.۰۴۳	۱۷۶۴	۲۶	۸۲۳۶	۱۶	۸۲۸۰	۲۰
۳۹	۱۰	.۰۳۴	۱۷۳۸	۲۷	۸۲۶۲	۱۷	۸۲۹۶	۲۱
۳۸	۹	.۰۲۴	۱۷۱۱	۲۶	۸۲۸۹	۱۶	۸۳۱۳	۲۲
۳۷	۱۰	.۰۱۴	۱۶۸۵	۲۶	۸۳۱۵	۱۷	۸۳۲۹	۲۳
۳۶	۱۰	۹۰.۰۰۵	۱۶۵۹	۲۶	۸۳۴۱	۱۶	۸۳۴۶	۲۴
۳۵	۱۰	۹۱.۹۹۹۵	۱۶۳۳	۲۶	۸۳۶۷	۱۷	۸۳۹۲	۲۵
۳۴	۹	۹۹.۸۵	۱۶۰۷	۲۷	۸۳۹۳	۱۶	۸۳۷۹	۲۶
۳۳	۱۰	۹۹.۷۶	۱۵۸۰	۲۶	۸۴۲۰	۱۷	۸۳۹۵	۲۷
۳۲	۱۰	۹۹.۶۶	۱۵۵۴	۲۶	۸۴۴۶	۱۶	۸۴۱۲	۲۸
۳۱	۹	۹۹.۵۶	۱۵۲۸	۲۶	۸۴۷۲	۱۷	۸۴۲۸	۲۹
۳۰	۱۰	۹۹.۴۷	۱۵۰۲	۲۶	۸۴۹۸	۱۷	۸۴۴۵	۳۰
۱		سینوس	تأثرات		تأثرات منقسم		سینوس منقسم	۱

۲۷

۱ ۰.۲۵
۲ ۰.۲۹
۳ ۰.۳۵
۴ ۰.۴۰
۵ ۰.۴۵
۶ ۰.۴۷
۷ ۰.۴۸
۸ ۰.۴۹
۹ ۰.۵۰

۲۶

۱ ۰.۲۳
۲ ۰.۲۸
۳ ۰.۳۰
۴ ۰.۳۲
۵ ۰.۳۳
۶ ۰.۳۴
۷ ۰.۳۵
۸ ۰.۳۶
۹ ۰.۳۷

۱۷

۱ ۰.۲۸
۲ ۰.۳۵
۳ ۰.۳۸
۴ ۰.۴۰
۵ ۰.۴۲
۶ ۰.۴۳
۷ ۰.۴۴
۸ ۰.۴۵
۹ ۰.۴۶

۱۶

۱ ۰.۲۷
۲ ۰.۳۳
۳ ۰.۳۸
۴ ۰.۴۰
۵ ۰.۴۲
۶ ۰.۴۳
۷ ۰.۴۴
۸ ۰.۴۵
۹ ۰.۴۶

۲۷

۱ ۲۵۰
۲ ۲۹۰
۳ ۱۳۵
۴ ۱۸۰
۵ ۲۲۵
۶ ۲۷۰
۷ ۳۱۵
۸ ۳۶۰
۹ ۴۰۵

۲۶

۱ ۲۴۴
۲ ۲۸۷
۳ ۱۳۰
۴ ۱۷۳
۵ ۲۱۷
۶ ۲۶۰
۷ ۳۰۳
۸ ۳۴۷
۹ ۳۹۰

۱۷

۱ ۲۲۸
۲ ۲۵۷
۳ ۲۸۵
۴ ۳۱۳
۵ ۳۴۲
۶ ۳۷۰
۷ ۳۹۸
۸ ۴۲۷
۹ ۴۵۵

۱۶

۱ ۲۲۷
۲ ۲۵۴
۳ ۲۸۰
۴ ۳۰۷
۵ ۳۳۴
۶ ۳۶۰
۷ ۳۸۷
۸ ۴۱۴
۹ ۴۴۰

۱	D	سینوس ششم	انحرافات ششم	D	انحرافات	D	سینوس	۱
۳۰	۱۰	۹۹۹۴۷	۱۱۵۰۲	۲۴	۱۸۴۹۸	۱۶	۷۸۴۴۵	۳۰
۲۹	۱۰	۹۹۴۷	۱۴۷۶	۲۵	۱۵۲۴	۱۷	۸۴۶۱	۳۱
۲۸	۹	۹۹۲۷	۱۴۵۰	۲۶	۱۵۵۰	۱۶	۸۴۷۸	۳۲
۲۷	۱۰	۹۹۱۸	۱۴۲۳	۲۷	۱۵۷۷	۱۶	۸۴۹۴	۳۳
۲۶	۱۰	۹۹۰۸	۱۳۹۷	۲۸	۱۶۰۳	۱۶	۸۵۱۰	۳۴
۲۵	۱۰	۹۸۹۸	۱۳۷۱	۲۹	۱۶۲۹	۱۷	۸۵۲۷	۳۵
۲۴	۹	۹۸۸۸	۱۳۴۵	۳۰	۱۶۵۵	۱۷	۸۵۴۳	۳۶
۲۳	۱۰	۹۸۷۹	۱۳۱۹	۳۱	۱۶۸۱	۱۸	۸۵۶۰	۳۷
۲۲	۱۰	۹۸۶۹	۱۲۹۳	۳۲	۱۷۰۷	۱۸	۸۵۷۶	۳۸
۲۱	۱۰	۹۸۵۹	۱۲۶۷	۳۳	۱۷۳۳	۱۸	۸۵۹۲	۳۹
۲۰	۹	۹۸۴۹	۱۲۴۱	۳۴	۱۷۵۹	۱۷	۸۶۰۹	۴۰
۱۹	۱۰	۹۸۴۰	۱۲۱۴	۳۵	۱۷۸۶	۱۹	۸۶۲۵	۴۱
۱۸	۱۰	۹۸۳۰	۱۱۸۸	۳۶	۱۸۱۲	۱۷	۸۶۴۲	۴۲
۱۷	۱۰	۹۸۲۰	۱۱۶۲	۳۷	۱۸۳۸	۱۹	۸۶۵۸	۴۳
۱۶	۱۰	۹۸۱۰	۱۱۳۶	۳۸	۱۸۶۴	۱۹	۸۶۷۴	۴۴
۱۵	۹	۹۸۰۱	۱۱۱۰	۳۹	۱۸۹۰	۱۷	۸۶۹۱	۴۵
۱۴	۱۰	۹۷۹۱	۱۰۸۴	۴۰	۱۹۱۶	۱۹	۸۷۰۷	۴۶
۱۳	۱۰	۹۷۸۱	۱۰۵۸	۴۱	۱۹۴۲	۱۹	۸۷۲۳	۴۷
۱۲	۱۰	۹۷۷۱	۱۰۳۲	۴۲	۱۹۶۸	۱۶	۸۷۳۹	۴۸
۱۱	۹	۹۷۶۱	۱۰۰۶	۴۳	۱۹۹۴	۱۷	۸۷۵۶	۴۹
۱۰	۹	۹۷۵۲	۰۹۸۰	۴۴	۲۰۲۰	۱۶	۸۷۷۲	۵۰
۹	۱۰	۹۷۴۲	۰۹۵۳	۴۵	۲۰۴۶	۱۷	۸۷۸۸	۵۱
۸	۱۰	۹۷۳۲	۰۹۲۷	۴۶	۲۰۷۳	۱۹	۸۸۰۵	۵۲
۷	۱۰	۹۷۲۲	۰۹۰۱	۴۷	۲۰۹۹	۱۹	۸۸۲۱	۵۳
۶	۱۰	۹۷۱۲	۰۸۷۵	۴۸	۲۱۲۵	۱۶	۸۸۳۷	۵۴
۵	۹	۹۷۰۲	۰۸۴۹	۴۹	۲۱۵۱	۱۹	۸۸۵۳	۵۵
۴	۱۰	۹۶۹۳	۰۸۲۳	۵۰	۲۱۷۷	۱۷	۸۸۶۹	۵۶
۳	۱۰	۹۶۸۳	۰۷۹۷	۵۱	۲۲۰۳	۱۹	۸۸۸۶	۵۷
۲	۱۰	۹۶۷۳	۰۷۷۱	۵۲	۲۲۲۹	۱۹	۸۹۰۲	۵۸
۱	۱۰	۹۶۶۳	۰۷۴۵	۵۳	۲۲۵۵	۱۶	۸۹۱۸	۵۹
۰		۹۶۵۳	۰۷۱۹	۵۴	۲۲۸۱	۱۶	۸۹۳۴	۶۰
۱		سینوس	انحرافات		انحرافات ششم		سینوس ششم	۱

«سینوس متمم» مثلاً لگاریتم $\cos 37^\circ 25'$ در ستونی نوشته شده است که بالای آن نوشته اند «سینوس متمم» و درین ستون عددیست روبرو به عدد $25'$ (از نخستین ستون راست):

$$\log \cos 37^\circ 25' = \bar{1}.89995$$

همچنین لگاریتم خطیهای مثلثاتی کمانهای بزرگتر از 45° در ستونهایست که زیر آنها «سینوس» «تانژانت» «تانژانت متمم» و یا «سینوس متمم» نوشته اند مثلاً لگاریتم $\sin 52^\circ 35'$ در ستونی نوشته شده است که زیر آن نوشته اند «سینوس» و در این ستون عددیست روبرو به عدد $35'$ (از نخستین ستون چپ):

$$\log \sin 52^\circ 35' = \bar{1}.89995$$

(در روشن است که باید $\cos 37^\circ 25'$ برابر $\sin 52^\circ 35'$ باشد زیرا

$$52^\circ 35' + 37^\circ 25' = 90^\circ \text{ است.}$$

اگر لگاریتم $\sin 52^\circ 33'$ را نخواهیم می بینیم روبرو به عدد $33'$ فقط چپاً بکیر نوشته شده: ۹۹۷۶ و این بدین جهت است که لگاریتم سینوس $52^\circ 33'$ با لگاریتم سینوس گوشه‌های مجاور در دو پیکیری که نوشته نشده برابر است

نوشته اند (ولی چون برای کمانهای کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ زین شماره تفاضلها زیاد است جزئیهای
تناسب برای این کمانها نوشته نشده در موقع لزوم باید خود حساب کنیم).

۴- الف- مسئله نخست- کمانی در دست است میخواهیم لگاریتم کلی از
خطهای مثلثاتی آنرا بیابیم.

حالت نخست- کمان فقط شامل زین و دقیقه است- در صورت لگاریتم
ناشناس عینا در جدول یافت میشود چنانکه مثلا در همین نمونه میخواهیم

$$\log \sin 54^\circ 13' = \bar{1}, 89781$$

$$\log \cos 37^\circ 34' = \bar{1}, 89918$$

$$\log \operatorname{tg} 54^\circ 24' = 0, 11345$$

$$\log \cot 37^\circ 17' = 0, 11842$$

حالت دوم- کمان شامل ثانیه (و یا برخه ای از دقیقه) میباشد.

مثال ۱- میخواهیم لگاریتم سینوس $34^\circ 47' 37''$ را حساب کنیم.

لگاریتم سینوس $34^\circ 47'$ در جدول یافت میشود:

$$\log \sin 34^\circ 47' = \bar{1}, 78723$$

و تفاضل میان این لگاریتم و لگاریتم سینوس $۴۸' ۳۷''$ برابر ۱۶ است یعنی ۱۶ لگاریتم
 حال چون تفاضل کمانها تقریباً با تفاضل لگاریتمها متناسب است گوئیم هرگاه بر کمان $۲۴'$
 افزوده شود بر لگاریتم سینوس $\frac{۳۴}{۱۶} \times ۱۶$ یعنی ۹ افزوده میشود. جدول خبرهای متناسب که
 حاشیه زیر عدد ۱۶ نوشته شده همین نتیجه را میدهد بدون آنکه لازم باشد $\frac{۳۴}{۱۶}$ را
 در ۱۶ ضرب کنیم:

در اینجا روبرو به ثانیه ۳ عدد ۸۰ نوشته شده یعنی هرگاه بر کمان ۳ ثانیه افزوده شود بر
 لگاریتم سینوس آن ۸۰ (از یک سد هزارم) افزوده میشود بنابراین هرگاه ۳۰
 افزوده شود بر لگاریتم ۸ سد هزارم افزوده میشود از طرف دیگر روبرو به ۴ عدد ۱۰۷ را
 نوشته شده پس در ازا ۳۴ ثانیه $۸ + ۱۰۷ = ۹۰۷$ یا تقریباً ۹ بر لگاریتم افزوده
 خواهد شد.

صورت محاسبه را بطور خلاصه چنین نویسند:

$$\log \sin ۳۷' ۴۷'' = \bar{1}, ۷۸۷۲۳$$

$$D = ۱۶$$

$$\frac{۳۴}{\quad} \quad \frac{۹}{\quad}$$

$$\log \sin ۳۷' ۴۷'' ۳۴ = \bar{1}, ۷۸۷۲۲$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha' \text{ и } \alpha'' = 0,11423$$

مثال ۲۔ منجوابیم لکارتیم سینوس متمم ۳۴ ۴۷ ۳۷ احساب کنیم۔

میدانیم هرگاه مکان مثبت و از ۹۰° کوچکتر باشد سومی تغییرات آن وارونه سومی

تغییرات سینوس متناوب است پس برای اینکه بر گارتی که در جدول نوشته شده چپ

بفرمایم (چون افزودن همیشه آسانتر از کم کردن است) نخست لکارتیم سنیوس متهم
۴۸. ۳۷ را دجله می یابیم:

$$\log \cos \pi i \quad \pi i = \bar{1}, 19441$$

د چون تفاضل میان این لگاریتم و لگاریتم سینوس متمم $۴۷^\circ ۳۷'$ برابر ۱۰ است

(یعنی دہ سہ ہزار م) پس گوئیم ہر گاہ از کمان ۲۶ کم شود بر کاتیم سنیوس منتسم

۱۰. $x = \frac{26}{6} = 4, 33$ و یا تقریباً ۴ سد هزارم افزوده خواهد شد.

$$\log \cos \mu V' \mu \Lambda' = 1,19441$$

$$\frac{-95}{-95} + 95 D = 10$$

$$\log \cos r' \quad r' \quad r'' = 1.19440$$

بهین تریب لگاریتم تا زانت متمم هر کان بدست میاید: مثلاً برای بدست آوردن

لگاریتم تا زانت متمم ۲۶' ۳۸' ۵۲' صورت عمل چنین است:

$$\log \cot 52^{\circ} 38' = \bar{1}, 88262$$

D=26

$$\frac{-34}{+15}$$

$$\log \cot 52^{\circ} 38' 26'' = \bar{1}, 88277$$

۵- ب- مسئله دوم- لگاریتم کی از خط های مثلثاتی کان ناشناسی درست است

میخواهیم آن کان را بشناسیم.

حالت نخست- لگاریتم عیناً در جدول هست. قبلاً باید در نظر داشت که

$$\log \sin 45^{\circ} : \log \cos 45^{\circ} = \bar{1}, 84949$$

$$\log \operatorname{tg} 45^{\circ} = \log \cot 45^{\circ} = 0$$

بنابراین اگر مثلاً نجوابیم کانی را بیایم که لگاریتم سینوس آن درست است

اگر این لگاریتم از $\bar{1}, 84949$ کوچکتر باشد کان از 45° کوچکتر خواهد بود و چنانکه

پیش گفتیم لگاریتم سینوس آن در ستونیت که بالای آن «سینوس» نوشته شده

شماره های کان بالای صفحه است و شماره دقیقه هایش در نخستین ستون سمت راست

و در بر وجه لگاریتم داده شده .

و اگر لگاریتمی که داریم از ۸۴۹۴۹ ر بزرگتر باشد گمان از ۴۵ بزرگتر است .
 لگاریتم سینوس آن در ستونی است که زیر آن «سینوس» نوشته شده - شماره
 زینه های گمان در پایین صفحه است و شماره دقیقه هایش در نخستین ستون دست چپ و
 بر وجه لگاریتم داده شده . مثال

$$\bar{1}, 21256 = \log \sin 37^{\circ} 49'$$

$$\bar{1}, 90206 = \log \sin 52^{\circ} 51'$$

همچنین اگر بخوابیم گمان را بیاچیم که لگاریتم سینوس متمم آن در دست باشد . اگر این لگاریتم
 از ۸۴۹۴۹ ر بزرگتر باشد گمان از ۴۵ کوچکتر است و بعکس .

اگر لگاریتم تانژانت گمانی در دست باشد خود گمان از ۴۵ که کوچکتر است یا بزرگتر
 نباشد بلکه این لگاریتم کوچکتر از صفر و یا بزرگتر از آن باشد

و اگر لگاریتم تانژانت متمم در دست باشد خود گمان کوچکتر از ۴۵ یا بزرگتر
 از آن است بنابراین لگاریتم بزرگتر از صفر و یا کوچکتر از صفر باشد - مثال :

$$\bar{1}, 90111 = \log \cos 37^{\circ} 13'$$

$$\bar{A} 218625 = \log \cos 52^\circ 19'$$

$$\bar{A} 19151 = \log \operatorname{tg} 37^\circ 55'$$

$$\cdot 10910 = \log \operatorname{tg} 52^\circ 10'$$

$$\bar{A} 187211 = \log \cot 37^\circ$$

$$\cdot 12000 = \log \cot 52^\circ 49'$$

حالت دوم - لگاریتم داده شده در جدول نیست .

مثال ۱ - لگاریتم سینوس گانی $\bar{A} 218304$ است میخواهیم آن کارابشناسیم.
این عدد در جدول در ستون «سینوس» نیست ولی نزدیکترین عدد به $\bar{A} 218304$ که
این ستون بوده و کوچکتر از $\bar{A} 218304$ باشد عدد $\bar{A} 218296$ است که لگاریتم
سینوس $21^\circ 37'$ میباشد . حال اگر عدد $\bar{A} 218296$ را از $\bar{A} 218304$
و از لگاریتم سینوس $21^\circ 37'$ کم کنیم ترتیب دو عدد ۱۰ و ۱۷ بدست
میآید و گوئیم چون برگاه برگان ۱ یا ۶ ثانیه افزوده شود بر لگاریتم سینوس آن
۱۷ سد هزارم افزوده میگردد پس برگاه بر لگاریتم سینوس ۱۰ افزوده شود برگان
۱۰ x ۶ ثانیه و یا تقریباً ۳۵ ثانیه افزوده خواهد شد - در این جا هم میتوان بنشینیم

اگر لگاریتم تا زانت کانی داد شود راه بدست آوردن کمان مانند بالا است. مثلاً
می‌پسینیم که:

$$210936 = \log \operatorname{tg} 52^{\circ} 1' 20''$$

مثال ۲ - لگاریتم سینوس متمم کانی ۱۸۹۹۸۰ است میخواهیم آن کمان را بشناسیم
این عدد هم در جدول در ستون سینوس متمم عیناً یافت نمیشود ولی چون هرگاه کمان
بزرگ شود از سینوس متمم آن کاسته میشود بنا برین در ستون سینوس متمم ما نزدیکترین
عدد می‌را به ۱۸۹۹۸۰ می‌یابیم که از آن بزرگتر باشد و آن ۱۸۹۹۸۵ است که
لگاریتم سینوس متمم ۲۶' ۳۷" میباشد زیادی ۱۸۹۹۸۵ از ۱۸۹۹۸۰ و
از لگاریتم سینوس متمم ۲۷' ۳۷" بترتیب ۵ و ۹ است بنا برین گوئیم چون
هرگاه بر کمان ۶ افزوده شود از لگاریتم سینوس متمم آن ۹ کم میشود پس اگر از لگاریتم
سینوس ۵ کم شود بر کمان $\frac{5}{9} \times 60$ یا تقریباً ۳۳ افزوده خواهد شد بنا برین

$$23 \quad 26 \quad 27 \quad \log \cos 27^{\circ} = 189910 \quad \text{صورت عمل چنین نوشته میشود}$$

$$\log \cos x = 189910$$

$$\frac{189915}{-5}$$

$$27^{\circ} \quad 26^{\circ} \quad D = 9$$

$$x = 27^{\circ} \quad 26^{\circ} \quad 23''$$

همین ترتیب با داشتن لگاریتم از زینت منجم یک گمان آن کار را حساب می کنیم
و زرش

۱- به اکتسید لگاریتم و کلاً زینم خط ای شتانی زیر را:

$$\cos 12^{\circ} 34' 16''$$

$$\lg 37^{\circ} 22' 12''$$

$$\cot 12^{\circ} 34' 16''$$

$$\lg 19^{\circ} 37' 1$$

$$\cos 41^{\circ} 32' 24''$$

$$\sin 69^{\circ} 15' 42''$$

$$\cot 62^{\circ} 51' 42''$$

$$\lg 74^{\circ} 31' 22''$$

۲- گمان x را به اکتسید بفرز آید

$$\log \sin x = 7,927185$$

$$\log \cos x = 7,34062$$

$$\log \sin x = 7,25076$$

$$\log \cos x = 7,11956$$

$$\log \cot x = 7,29381$$

$$\log \lg x = 7,73950$$

$$\log \cot x = 7,95991$$

$$\log \lg x = 7,54807$$

۳- بگفت لگاریتم x را حساب کنید:

$$x = 1,5901 \times \lg 21^{\circ} 31' 40''$$

$$x = \sqrt{0.05219} \times \cos 9.1125$$

$$x = \frac{29.56}{\cos 23.2927}$$

$$x = \sqrt{0.05219 \times \sin^2 29.319}$$

$$\sin x = \frac{15.076}{21.119}$$

$$\csc x = \frac{23.295}{24.367}$$

$$\cos x = \frac{131.17}{154.19}$$

$$\cot x = \frac{2.0513}{1.4359}$$

بخش سوم

الف - تبدیل مجموع دو خط مثلثاتی بجای ضرب و بعکس

۶ - تبدیل حاصل ضرب مجموع - اگر دو طرف دو اتحاد (۱۹) و (۲۰) را

به هم بسازیم یا از هم کم کنیم ترتیب دو اتحاد زیر را خواهیم داشت :

$$(A) \quad \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cdot \cos b$$

$$(B) \quad \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \cdot \sin b$$

همچنین اگر دو طرف دو اتحاد (۱۷) و (۱۸) را یکبار به هم بسازیم و یکبار از هم کم کنیم

دو اتحاد زیر بدست میآید :

$$(C) \quad \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cdot \cos b$$

$$(D) \quad \cos(a+b) - \cos(a-b) = 2 \sin a \cdot \sin b$$

از روی این چهار اتحاد میتوان حاصل ضرب دو خط مثلثاتی (سینوس و سینوس متعم) را

به مجموع یا تفاضل دو سینوس یا دو سینوس متعم مبدل نمود (کافی است این اتحاد را از راست

بچپ بخوانیم)

مثلاً اگر بخواهیم حاصل ضرب $2 \cos 15^\circ \cos 45^\circ$ و یا $\sqrt{2} \cos 15^\circ$ را حساب کنیم بآر اتحاد (C) میتوان نوشت:

$$2 \cos 15^\circ \cos 45^\circ = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

و رزش

از اینجا

عبارت های زیر را به مجموع یا تفاضل تبدیل نمایند:

$$\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad 2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ \quad (1)$$

$$\sin 45^\circ \cos 45^\circ \quad (4) \quad \cos 45^\circ \cos 45^\circ \quad (3)$$

$$2 \sin nx \cos (n-1)x \quad (6) \quad \sin 45^\circ \sin 45^\circ \quad (5)$$

$$\cos 45^\circ \sin 45^\circ \quad (8) \quad \cos 45^\circ \cos 45^\circ \quad (7)$$

(9) اتحاد زیر را ثابت کنید

$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2 x - \cos^2 x$$

۱۰- $\sin 15^\circ$ ، $\sin 75^\circ$ ، $\cos 75^\circ$ را از روی تبدیل مجموع حساب

کنید (همچنانکه در مثال بالا) و \cos را حساب کردیم)

۷- تبدیل مجموع به حاصل ضرب - حال اگر $a + b, a - b$

را بترتیب p و q بنویسیم

$$a + b = p$$

$$a - b = q$$

$$a = \frac{p+q}{2} \quad \text{خواهیم داشت:}$$

$$b = \frac{p-q}{2}$$

بنابراین اتحادهای (A), (B), (C), (D) بترتیب چنین نوشته

میشود:

$$(۲۶) \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$(۲۷) \quad \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$(۲۸) \quad \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$(۲۹) \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

از روی این اتحادها میتوان مجموع جبری دو خط مثلثاتی (دو سینوس یا دو کسینوس)

تتم، راه حاصل ضرب مبدل نمود. مثلاً

$$\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2}$$

$$= -2 \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تبصره - برای مبدل کردن مجموع جبری یک سینوس و یک سینوس متمم مثلاً

برای مبدل کردن $\sin p + \cos q$ حاصل ضرب میتوان $\sin p$ را

$\sin(\frac{\pi}{2} - q)$ نوشت و یا $\cos q$ را $\cos(\frac{\pi}{2} - p)$ پس

$$\sin p + \cos q = \sin p + \sin(\frac{\pi}{2} - q) = 2 \sin \frac{p + \frac{\pi}{2} - q}{2} \cos \frac{p - \frac{\pi}{2} + q}{2}$$

$$= \cos(\frac{\pi}{2} - p) + \cos q = 2 \cos \frac{\frac{\pi}{2} - p + q}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - p - q}{2}$$

همچنین است راه تبدیل کردن $\sin p - \sin q$ و $\cos p \pm \sin q$

بجاء ضرب

۸- تبدیل مجموع جبری دو مانترانت به حاصل ضرب - برای اسکله

مجموع جبری دو مانترانت راه حاصل ضرب مبدل نمایم ترتیب چنین می‌باشد:

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{\cos a \cos b}$$

$$(۳۰) \quad \operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b} \quad \text{یا}$$

میتوان گفت که طرف دوم حاصل ضرب سه سازه $\sin(a \pm b)$ و $\frac{1}{\cos a}$ و $\frac{1}{\cos b}$

است

مجموع جبری دو تانژانت متمم مانند مجموع جبری دو تانژانت تبدیل میشود.

$$\cot a \pm \cot b = \frac{\sin(b \mp a)}{\sin a \cdot \sin b}$$

بتصوره - همچنانکه برای تبدیل کردن مجموع جبری یک سینوس و یک سینوس

متمم گفت شد در مورد مجموع جبری یک تانژانت و یک تانژانت متمم نیز میتوان

عمل نمود مثلاً

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} a + \cot b &= \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - b \right) = \frac{\sin \left(a + \frac{\pi}{2} - b \right)}{\cos a \cos \left(\frac{\pi}{2} - b \right)} \\ &= \frac{\sin \left[\frac{\pi}{2} + (a - b) \right]}{\cos a \cos \left(\frac{\pi}{2} - b \right)} \end{aligned}$$

ولی در این جا آسانتر چنین است که $\operatorname{tg} a + \cot b$ را نیز مانند $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$

تبدیل نماییم:

$$\operatorname{tg} a + \cot b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\sin a \sin b + \cos a \cos b}{\cos a \sin b} = \frac{\cos(a - b)}{\cos a \sin b}$$

ورزش

عبارتهای زیر را بصورت حاصل ضرب دو خط مثلثاتی بنویسید :

$$\sin 45^\circ + \cos 15^\circ \quad (6) \quad \sin 15^\circ + \sin 35^\circ \quad (1)$$

$$\cos 12^\circ - \cos 48^\circ \quad (7) \quad \sin 75^\circ + \sin 15^\circ \quad (2)$$

$$\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6} \quad (8) \quad \cos 50^\circ + \cos 20^\circ \quad (3)$$

$$\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \quad (9) \quad \sin 70^\circ - \sin 10^\circ \quad (4)$$

$$\cos 4\alpha - \cos(-\alpha) \quad (10) \quad \sin 3x - \sin x \quad (5)$$

$$\cos(n+1)x - \cos(n-1)x \quad (11)$$

$$\sin(n+1)\frac{\pi}{4} - \cos(n-3)\frac{\pi}{4} \quad (12)$$

درستی برابریهای زیر را بررسی نمایید :

$$\sin 18^\circ = \sin 4^\circ + \sin 2^\circ \quad (13)$$

$$\frac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 50^\circ} = \sqrt{3} \quad (14)$$

$$\cos 18^\circ + \cos 4^\circ = \cos 2^\circ \quad (15)$$

درستی اتحادهای زیر را بررسی نمایید :

$$\frac{\sin 2x + \sin 2y}{\sin 2x - \sin 2y} = \frac{\operatorname{tg}(x+y)}{\operatorname{tg}(x-y)} \quad (16)$$

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}} \quad (17)$$

$$\frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = - \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} \quad (18)$$

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \quad (19)$$

$$\frac{\cos 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \sin 2x} = \operatorname{tg} x \quad (20)$$

$$\frac{\sin 2x + \sin x}{\cos 2x + \cos x} = \operatorname{tg} 2x \quad (21)$$

$$\sin(x+2y) - \sin(x-2y) = 2 \cos x \cos y \sin y \quad (22)$$

$$\cos(2x-y) - \cos(2x+y) = 2 \sin x \sin y \cos y \quad (23)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \quad (24)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \quad (25)$$

$$\frac{\sin 2x + \sin 4x}{\cos 2x - \cos 4x} = \cot x \quad (26)$$

$$\frac{\sin(n-2)x + \sin nx}{\cos(n-2)x - \cos nx} = \cot x \quad (27)$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) - \sin(70^\circ + \alpha) - \sin(70^\circ - \alpha) = 0 \quad (28)$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 2 \cos x \cos 2x \sin 3x \quad (29)$$

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 4 \cos x \cos 3x \cos 5x \quad (۲۰)$$

$$\sin x + \sin y + \sin(x+y) = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x+y}{2} \quad (۲۱)$$

$$\sin x + \sin y - \sin(x+y) = 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x+y}{2} \quad (۲۲)$$

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) \quad (۲۳)$$

$$= 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{c+a}{2}$$

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c) \quad (۲۴)$$

$$= 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{b+c}{2} \cos \frac{c+a}{2}$$

(۲۵) ثابت کنید که اگر $a + b + c = 180^\circ$ باشد داریم:

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{c+a}{2}$$

$$\cos a + \cos b + \cos c - 1 = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{b+c}{2} \cos \frac{c+a}{2}$$

$$\frac{\cos 3x - \cos x}{\cos 3x + \cos x} = -\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} x \quad (۲۶)$$

$$\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 5x + \sin 3x} = \cot 3x \cdot \operatorname{tg} x \quad (۲۷)$$

$$\frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 3x - \sin x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} \quad (۲۸)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \sin x \quad (۲۹)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{p} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{p} - x\right) = -\sqrt{p} \sin x \quad (f.)$$

$$\cot^2 x + \tan x = \frac{p \cos^2 x}{\sin \Delta x + \sin px} \quad (f1)$$

$$\cot x + \cot^2 x = \frac{p \sin^2 x}{\cos x - \cos px} \quad (f2)$$

$$\tan^2 x \cdot \tan^2 x + 1 = \frac{p \cos x}{\cos x + \cos px} \quad (f3)$$

$$1 + \tan^2 x \cdot \cot^2 x = \frac{p \sin \Delta x}{\sin \Delta x + \sin x} \quad (f4)$$

$$\cos^2 x \cos x - \sin^2 x \sin x = \cos \Delta x \quad (f5)$$

$$\cos^2 x \cos x + \sin^2 x \sin x = \cos^2 x \quad (f6)$$

$$\frac{\sin^2 x + \sin x}{\cos^2 x + \cos x} = \tan \frac{px}{p} \quad (f7)$$

$$\frac{\sin x + p \sin^2 x + \sin \Delta x}{\sin^2 x + p \sin \Delta x + \sin x} = \frac{\sin^2 x}{\sin \Delta x} \quad (f8)$$

$$\frac{\cos x + \cos^2 x}{\cos x - \cos^2 x} = \cot^2 x \cot \Delta x \quad (f9)$$

$$\frac{\sin x + \cos^2 x - 1}{\cos x - \sin^2 x} = \tan x \quad (50)$$

$$\frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x} = \tan \frac{x}{p} \quad (51)$$

$$\frac{\cos^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x + \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x - \cos x}{\cos \Delta x - \cos^2 x} = \frac{p \sin^2 x}{\sin^2 x} \quad (52)$$

$$\frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x + \sin^2 x} - \frac{\sin \Delta x - \sin x}{\sin^2 x + \sin x} = \frac{p \sin^2 x}{\sin^2 x} \quad (53)$$

$$\frac{\cos 12x + \cos 4x}{\sin 14x - \sin 4x} + \frac{\sin 14x - \sin 4x}{\cos 14x + \cos 4x} = \frac{2 \cos 2x}{\sin 10x} \quad (54)$$

$$\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \tan 2x \quad (55)$$

$$\frac{\sin (x+2y) + \sin (2x+y)}{\sin 2x + \sin 2y} = 2 \cos (x+y) \quad (56)$$

$$\frac{\cos (x+2y) - \cos (2x+y)}{\cos 2y - \cos 2x} = 2 \cos (x+y) \quad (57)$$

$$\cos x \tan (y-x) + \sin x = \frac{\sin y}{\cos (y-x)} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cos^2 x \sin^2 x \\ = \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 x \end{aligned} \quad (59)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \left(1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \quad (60)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \quad (61)$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{16} \left(1 - 2 \cos 4x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \quad (62)$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x) \quad (63)$$

پایخ های منجمد بیای زیر را کم میان ه و ۲۶ میباشد دست آورید:

$$\sin 2x = \sin x \quad (64)$$

(۲۶:۰ و ۰:۰ و ۱۸۰:۰ و ۳۶۰:۰)

$$\cos 2x = \cos x \quad (65)$$

$$\cos \gamma x = \cos x \quad (44)$$

$$\cos \gamma x = \sin x \quad (45)$$

$$\sin \gamma x + \sin x = \cos x \quad (46)$$

$$\sin \Delta x - \sin x + \cos \gamma x + \cos \gamma x = 0 \quad (47)$$

$$\sin \Delta x + \gamma \cos x + \sin \gamma x = 0 \quad (48)$$

$$\cos x + \cos \gamma x + \cos \Delta x = 0 \quad (49)$$

$$\tan \gamma x + \tan x = 0 \quad (50)$$

$$\tan x - \cot x = \cot \gamma x \quad (51)$$

$$\sin \frac{x}{\gamma} + \cos x = 1 \quad (52)$$

$$\cos \frac{x}{\gamma} - \cos x = 1 \quad (53)$$

$$\tan \frac{x}{\gamma} + \cos x = 1 \quad (54)$$

$$\sin \frac{x}{\gamma} - \cos x = 1 \quad (55)$$

ب- محاسبه پذیر نمودن مجموع چند خط مثلثاتی با لگاریتم

۹۰- یکی از فایده های عمل تبدیل کردن حاصل جمع (یا تفاضل) های چند

مثلثاتی ب حاصل ضرب آسان نمودن محاسبه های عددی عبارتهای مثلثاتی است

مثلاً اگر بخوابیم عبارت

$$S = \cos 13^\circ - \cos 27^\circ$$

را به کمک جدول لگاریتم حساب کنیم اگر این عبارت ب حاصل ضرب تبدیل نشود
باشد باید نخست لگاریتم $\cos 13^\circ$ و لگاریتم $\cos 27^\circ$ را از روی جدول پیدا کنیم

$$\log \cos 13^\circ = \bar{1}.911172$$

$$\log \cos 27^\circ = \bar{1}.94911$$

پس خود $\cos 13^\circ$ و $\cos 27^\circ$ را از روی جدول پیدا کرده از هم کم میکنیم تا

حساب شود:

$$S = \cos 13^\circ - \cos 27^\circ = 0.974436 - 0.89100 = 0.083436$$

ولی اگر نخست $\frac{S}{2}$ را ب حاصل ضرب تبدیل نماییم:

$$S = -2 \sin \frac{13+27}{2} \sin \frac{13-27}{2} = 2 \sin 20^\circ \sin 7^\circ$$

خواهیم داشت:

$$\log S = \log 2 + \log \sin 2^\circ + \log \sin 2^\circ$$

$$= 0.30103 + 1.52405 + 1.52405$$

$$= 3.34913$$

و این تقریب کافی است پسیم 3.34913 لگاریتم چه عددیست

$$3.34913 = \log 0.0002236$$

$$S = 0.0002236$$

۱- برگزیده عبارت جبری S را طوری تبدیل نموده باشیم که عبارت

تبدیل شده تنها دو عمل ضرب و تقسیم را دربر داشته باشد گوئیم S را محاسبه پذیر
بالگاریتم نموده ایم. مثلاً برای اینکه $\log a + \log b$ محاسبه پذیر بالگاریتم شود آن را

بصورت $\frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$ درمی آوریم (دستور ۴):

$$\log(\log a + \log b) = \log \sin(a+b) + \log \cos a + \log \cos b$$

مثال ۱- میخواهیم $S = \sin a + 2 \sin 2a + \sin 3a$

را حاصل ضرب تبدیل کنیم

نخست مجموع $\sin a + \sin 3a$ را حاصل ضرب تبدیل میکنیم. ترتیب خواهیم داشت

$$S = (\sin a + \sin 3a) + 2 \sin 2a$$

$$= 2 \sin 2a \cos 2a + 2 \sin 2a$$

$$= 2 \sin 2a (1 + \cos 2a)$$

$$= 2 \sin 2a + 2 \cos^2 a$$

$$= 4 \sin 2a \cdot \cos^2 a$$

مثال ۲-

$$S = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a$$

برای تبدیل نمودن S حاصل ضرب ترتیب مینویسیم:

$$S = (\sin a + \sin 4a) + (\sin 2a + \sin 3a)$$

$$= 2 \sin \frac{5a}{2} \cos \frac{3a}{2} + 2 \sin \frac{5a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{5a}{2} \left(\cos \frac{3a}{2} + \cos \frac{a}{2} \right)$$

$$= 2 \sin \frac{5a}{2} \times 2 \cos a \cos \frac{a}{2}$$

$$= 4 \sin \frac{5a}{2} \cos a \cos \frac{a}{2}$$

تقصرو - ارین و شمال و از شمالهای زیر را دکلی برای محاسبه پذیر نمودن

عبارتی که شماره جمله های آن پیش از دو است بدست میآید:

باید کوشش نمود که بتدریج از شماره جمله ها کم شود تا بیک برسد - برای این کار نخست مجموع
جبری دو جمله از آن عبارت را مبدل باصل ضرب میکنیم (با ورزش زیاد میتوان
جمله ها را بطور شایسته با هم جور کرد) عبارتی بدست میآید که شماره جمله های آن کمتر از
شماره جمله های عبارت نخست است - و بهمین ترتیب در عبارت تازه عمل میشود (اگر
لازم باشد).

مثال ۳-

$$S = \sin a + \sin b + \sin c - \sin (a + b + c)$$

بترتیب داریم:

$$\begin{aligned} S &= (\sin a + \sin b) + [\sin c - \sin (a + b + c)] \\ &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \sin \frac{c-a-b-c}{2} \cos \frac{a+b+c}{2} \\ &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} - 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \left(\frac{a+b}{2} + c \right) \\ &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \left[\cos \frac{a-b}{2} - \cos \left(\frac{a+b}{2} + c \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \times 2 \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{c+a}{2} \\
 &= 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{c+a}{2}
 \end{aligned}$$

$$C = \cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c) \quad \text{و نیز}$$

را بترتیب چنین تبدیل نمایم:

$$\begin{aligned}
 C &= (\cos a + \cos b) + [\cos c + \cos(a+b+c)] \\
 &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} + c \right) \cdot \cos \frac{a+b}{2} \\
 &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \left[\cos \frac{a-b}{2} + \cos \left(\frac{a+b}{2} + c \right) \right] \\
 &= 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+c}{2} \cos \frac{b+c}{2}
 \end{aligned}$$

مثال ۴- میخواهیم عبارت $1 + \sin a$ را محاسبه پذیر با کسری بنویسیم. با آنکه

این عبارت بصورت مجموع جبری دو خط مثلثاتی نیست ولی اگر بجای ۱ بنویسیم $\frac{\pi}{2}$ خواهیم داشت:

$$1 + \sin a = \sin \frac{\pi}{2} + \sin a$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} \right)$$

ولی $\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}$ و $\frac{\pi}{2} + \frac{a}{2}$ منتهی به یک ربع باشند

$$1 + \sin a = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right)$$

و یا

$$1 + \sin a = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)$$

همچنین میتوان $1 - \sin a$ ، $1 + \cos a$ ، $1 - \cos a$ و $1 - \sin a$ را بصورت
حاصل ضرب نوشت:

$$\begin{aligned} 1 - \sin a &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin a \\ &= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right) \\ &= 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) \\ &= 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right) \end{aligned}$$

در عبارت های $1 + \cos a$ و $1 - \cos a$ بجای a میگذاریم 2α :

$$\begin{aligned} 1 + \cos a &= \cos 0 + \cos a \\ &= 2 \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2} = 2 \cos^2 \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \cos a &= \cos 0 - \cos a \\ &= 2 \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{a}{2} = 2 \sin^2 \frac{a}{2} \end{aligned}$$

این دو اتحاد همان اتحادهای (۲۶) و (۲۷) است.

تبصره - مانند مثال بالا هرگاه در عبارتی عددی مانند $\frac{1}{4}$ و $\frac{\sqrt{2}}{4}$

و $\frac{\sqrt{3}}{4}$ و ۱ و $\frac{\sqrt{3}}{4}$ و $\sqrt{3}$ باشد میتوان برای تبدیل کردن آن عبارت این عدد را بصورت خطی مثلثاتی نوشت:

مثال ۵ - برای محاسبه پذیر نمودن $\frac{1 + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a}$ میتوان بجای آن را اینشت

$\frac{\pi}{4}$ نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} a} \\ &= \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + a)}{\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos a} \quad \text{و بنابر دستور (۴)} \\ &= \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - a)}{\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos a} \\ &= \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + a)}{\sin(\frac{\pi}{4} - a)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + a)}{\cos(\frac{\pi}{4} + a)} \\ &= \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + a) \end{aligned}$$

میتوان این نتیجه را بترقیب زیر زودتر بدست آورد:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} a}{1 - 1 \times \operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} a} = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + a)$$

نماینده خواهیم یافت:

$$\frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$$

مثال ۶-

$$S = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$$

ترتیب داریم:

$$S = (\sin \alpha + \sin 3\alpha) + \sin 2\alpha$$

$$= 2 \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha$$

غالباً اینک $\sin 2\alpha$ را ساز و میگیریم ترتیب خواهیم داشت:

$$S = \sin 2\alpha (2 \cos \alpha + 1) = 2 \sin 2\alpha \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \sin 2\alpha \left(\cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 2 \sin 2\alpha \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right)$$

و با درجۀ دوم بجای $\sin 2\alpha$ میگذاریم $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ و خواهیم داشت:

$$S = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$= 2 \cos \alpha (\sin 2\alpha + \sin \alpha) = 2 \cos \alpha \cdot \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

مثال ۲- تبدیل عبارت $A = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ بجای $\sqrt{3}$ میتوان $\frac{\pi}{3}$ گذاشت:

$$\begin{aligned} A &= \sin x + \lg \frac{\pi}{3} \cdot \cos x \\ &= \sin x + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cos x \\ &= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} (\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos x) \\ &= \frac{\sin(x + \frac{\pi}{3})}{\cos \frac{\pi}{3}} = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

تبصره - بطور کلی هر عدد جبری را میتوان بصورت مختلط مثلثاتی نوشت:
اگر قدر مطلق آن از ۱ کوچک باشد میتوان آن عدد را سینوس یا سینوس متمم یا تانژانت
و یا تانژانت متمم کمانی گرفت - و برابر با تانژانت یا تانژانت متمم کمانی خواهد بود
هرگاه قدر مطلقش بزرگتر از ۱ باشد (در هر دو حالت میتوان آن کمان را از روی
جدول بدست آورد).

مثال ۸- میخواهیم $\frac{1}{4} + \cos x$ را محاسبه پذیر با لگاریتم نماییم.

- عدد $\frac{1}{4}$ را میتوان سینوس متمم کمانی گرفت که آنرا α مینامیم

($\alpha = 17^\circ 26' 27''$) بنابراین:

$$\frac{1}{r} + \cos x = \cos \alpha + \cos x$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + x}{2} \cos \frac{x - \alpha}{2}$$

پس اگر x باز نیز انداز گرفته شده باشد خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r} + \cos x = 2 \cos \left(\frac{x}{2} + 1^\circ 42' 43'' 5 \right) \cos \left(\frac{x}{2} - 1^\circ 42' 43'' 5 \right)$$

۱۱- تبدیل عبارت کلی $a \sin x + b \cos x$ به حاصل ضرب یک عبارت

$\sin x + \sqrt{2} \cos x$ (مثال ۷) صورت مخصوصی است از این عبارت کلی

که در آن a برابر (۱) و b برابر $\sqrt{2}$ می باشد. چنانکه دیدیم راه تبدیل نمودن آن این بود که $\sqrt{2}$ را تا نرئانت $\frac{\pi}{4}$ بگیریم (میتوان نیز بجای $\sqrt{2}$ تا نرئانت $\frac{\pi}{6}$ مسم $\frac{\pi}{6}$ گذاشت).

همین راه را برای تبدیل نمودن هر عبارتی که بصورت $a \sin x + b \cos x$

باشد بکار میبریم. برای اینکار نخست آنرا چنین مینویسیم:

$$a \sin x + b \cos x = a \left(\sin x + \frac{b}{a} \cos x \right)$$

و چون میتوانیم همیشه کجانی مانند φ بدست آوریم که تا نرئانت آن برابر عدد $\frac{b}{a}$ باشد

$$\frac{b}{a} = \sin \varphi \quad \text{باشد}$$

پس میتوان عبارت بالا را چنین نوشت :

$$a \sin x + b \cos x = a (\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x)$$

$$= \frac{a}{\cos \varphi} (\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x)$$

$$= \frac{a}{\cos \varphi} \sin (x + \varphi)$$

که عبارتست محاسبه پذیر بالگاتیم.

φ در این عبارت یکی از کمانهای است که تاثر آنست آن حد $\frac{\pi}{2}$ است

و از روی جدول بدست میآید.

مثال- میخواهیم عبارت $A = 2 \sin x - 3 \cos x$ را که در آن x

برابر 30° است بالگاتیم حساب کنیم. نخست ۲ را ساز میگیریم:

$$A = 2 \left(\sin x - \frac{3}{2} \cos x \right)$$

حال از روی جدول کمانی φ پیدا می کنیم که تاثر آنست آن $-\frac{3}{2}$ باشد

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{3}{2}$$

$\varphi = (29^\circ 18' 56'') - 180^\circ$ و میتوان آنرا $(29^\circ 18' 56'')$ -

گرفت.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2 \sin(x + \varphi)}{\cos \varphi} \\
 &= \frac{2 \sin(31^\circ 42' - 56^\circ 18' 29'')}{\cos 56^\circ 18' 29''} \\
 &= - \frac{2 \sin 24^\circ 35' 29''}{\cos 56^\circ 18' 29''} \\
 A \text{ منفی است نخست } A - \text{ را حساب می کنیم:}
 \end{aligned}$$

$$\log(-A) = \log 2 + \log \sin 24^\circ 35' 29'' + \operatorname{colog} \cos 56^\circ 18' 29''$$

$$= 0.30103 + \bar{1}.61925 + 2.5592$$

$$= 0.47948$$

$$-A = 1.5004$$

$$A = -1.5004$$

متبصره - برای تبدیل نمودن $a \sin x + b \cos x$ میتوان نیز b را ساز گرفت و بجای $\frac{a}{b}$ تاثرانت گانی α گذاشت

$$\begin{aligned}
 a \sin x + b \cos x &= b \left(\frac{a}{b} \sin x + \cos x \right) \\
 &= \frac{b}{\cos \alpha} (\sin \alpha \sin x + \cos \alpha \cos x) \\
 &= \frac{b \cos(x - \alpha)}{\cos \alpha}
 \end{aligned}$$

و نیز چنانکه در پیش اشاره شد میتوان $\frac{b}{a}$ یا $\frac{a}{b}$ را برابر تانژانت متمم کمانی گرفت
مثلاً اگر $\frac{b}{a}$ را تانژانت متمم β بنامیم خواهیم داشت :

$$a(\sin x + \frac{b}{a} \cos x) = a(\sin x + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cos x)$$

$$= \frac{a \cos(x - \beta)}{\sin \beta}$$

(این β متمم آن φ است)

۱۲- تبدیل $a^2 + b^2$ ب حاصل ضرب - هرگاه عبارتی بصورت

$a^2 + b^2$ باشد و نخواهیم آنرا محاسبه پذیر بانگاریتم نامیم نخست آنرا چنین بنویسیم :

$$a^2 + b^2 = a^2 (1 + \frac{b^2}{a^2})$$

و چون میتوان همیشه کمانی φ (میان 0 و $\frac{\pi}{2}$) بدست آورد که بانژانت

$$\tan \varphi = \left| \frac{b}{a} \right| \quad \text{آن برابر } \left| \frac{b}{a} \right| \text{ باشد}$$

پس خواهیم داشت :

$$a^2 + b^2 = a^2 (1 + \tan^2 \varphi)$$

$$= \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} = \left(\frac{|a|}{\cos \varphi} \right)^2$$

$$\log \tan \varphi = \log |b| + \operatorname{colog} |a|$$

$$\log(a^2 + b^2) = 2(\log |a| + \operatorname{colog} \cos \varphi)$$

تبصره - اگر عبارت $a^2 + b^2$ جمله بزرگتر را سازد بکسیریم و اگر فرض کنیم این جمله بزرگتر a^2 باشد در صورت $\frac{b^2}{a^2}$ از ۱، کوچکتر است و میتوان آنرا برابر بسوی

متمم کانی α گرفت $(0 < \alpha < \frac{\pi}{4})$

و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = a^2 (1 + \cos \alpha) \\ &= 2a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\log \cos \alpha = 2 (\log |a| + \operatorname{colog} |b|)$$

$$\log(a^2 + b^2) = \log 2 + 2 (\log \cos \frac{\alpha}{2} + \log |a|)$$

مثال - میخوایم $S = \cos^2 116^\circ 24' + \sin^2 43^\circ 36'$

حساب کنیم.

راه نخست:

$$S = \sin^2 43^\circ 36' (1 + \frac{\cos^2 116^\circ 24'}{\sin^2 43^\circ 36'})$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{\cos 116^\circ 24'}{\sin 43^\circ 36'} \right|$$

$$S = \frac{\sin^2 43^\circ 36'}{\cos^2 \varphi}$$

$$\begin{aligned}
 \log \operatorname{tg} \varphi &= \log | \cos ۱۱^{\circ} ۲۴' | + \operatorname{colog} \sin ۴۳^{\circ} ۳۶' \\
 &= \log \sin ۲۶^{\circ} ۲۴' + \operatorname{colog} \sin ۴۳^{\circ} ۳۶' \\
 &= \bar{1}, ۶۴۸۰۰ + ۰, ۱۶۱۳۹ \\
 &= \bar{1}, ۸۰۹۳۹
 \end{aligned}$$

$$\varphi = ۳۲^{\circ} ۴۱' ۴۳''$$

$$\log \cos \varphi = \bar{1}, ۹۲۴۵۱$$

$$\begin{aligned}
 \log S &= ۲ (\log \sin ۴۳^{\circ} ۳۶' + \operatorname{colog} \cos \varphi) \\
 &= ۲ (\bar{1}, ۸۳۸۶۱ + ۰, ۷۵۴۹) \\
 &= ۲ \times \bar{1}, ۹۱۴۱۰ = \bar{1}, ۸۲۸۲۰
 \end{aligned}$$

$$S = ۷۶۷۳۲۸$$

راه دوم- $۲۴^{\circ} ۱۱' \cos$ برابر است با $۲۴^{\circ} \sin$ -

$$۲۴^{\circ} ۱۱' \cos^2 = \sin^2 ۲۴^{\circ} \quad \text{پس}$$

حال چون $۲۴^{\circ} \sin$ از $۳۶^{\circ} \sin ۴۳^{\circ}$ کوچکتر است
چنین بنویسیم:

$$S = \sin^2 43^\circ 36' (1 + \cos \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin^2 26^\circ 24'}{\sin^2 43^\circ 36'}$$

که در آن

$$S = 2 \sin^2 43^\circ 36' \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

پس

$$\log \cos \alpha = 2 (\log \sin 26^\circ 24' + \text{colog} \sin 43^\circ 36')$$

$$= 2 \times \bar{1}.10939$$

$$= \bar{1}.61878$$

$$\alpha = 65^\circ 26' 11''$$

$$\frac{\alpha}{2} = 32^\circ 43' 6''$$

$$\log S = \log 2 + 2 (\log \sin 43^\circ 36' + \log \cos 32^\circ 43' 6'')$$

$$= 0.30103 + 2 (\bar{1}.13161 + \bar{1}.92492)$$

$$= 0.30103 + 2 \times \bar{1}.76358 = \bar{1}.82819$$

$$S = 0.67322$$

تبصره - اختلاف میان دو نتیجه از آنجا است که تقریباً هیچک از لگاریتمی

که در جدول پنج پیکری یافت می‌شود درست نیست و هر لگاریتم بایک سد هزارم تقریباً

نوشته شده است :

۱۳- تبدیل $c^2 - o^2$. هرگاه عبارتی بصورت $c^2 - a^2$ باشد و بخوایم

آنرا مناسبه پذیر بالکارتان نمایم a^2 از c بزرگتر باشد بنویسیم :

$$a^2 - c^2 = a^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right)$$

و میتوانیم $\frac{c}{a}$ را سینوس (یا سینوس متمم) کانی φ بگیریم

$$\sin \varphi = \frac{c}{a} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2} \right)$$

و خواهیم داشت :

$$a^2 - c^2 = a^2 (1 - \sin^2 \varphi) = a^2 \cdot \cos^2 \varphi$$

$$\log(a^2 - c^2) = 2(\log |a| + \log \cos \varphi)$$

و اگر a^2 کوچکتر از c^2 باشد نخست $a^2 - c^2$ را حساب میکنیم که مثبت است :

$$c^2 - a^2 = c^2 \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right)$$

و $\frac{a}{c}$ را میتوان برابر سینوس (یا سینوس متمم) کانی α گرفت :

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

بنابراین

$$b^2 - a^2 = b^2 (1 - \sin^2 \alpha) = b^2 \cos^2 \alpha$$

$$\log [-(a^2 - b^2)] = 2 (\log |b| + \log \cos \alpha)$$

ورزش

بفرض اینکه α برابر 15° 25° 45° باشد حساب کنید عبارتهای زیر را:

$$\frac{2 \cos 2\alpha - 1}{2 \cos 2\alpha + 1} \quad (1)$$

$$\frac{\cos 2\alpha - \cos^3 \alpha}{\cos 2\alpha + \cos^3 \alpha} \quad (2)$$

$$\frac{1,173}{\sqrt{1 + (1,173)^2 \cos^2 \alpha}} \quad (3)$$

$$\cos^3 \alpha - \cos 2\alpha + \cos \alpha \quad (4)$$

$$\sqrt[3]{\frac{\sin^2 3\alpha + \cot^2 2\alpha}{\cos^2 \alpha - \lg^2 \alpha}} \quad (5)$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha \quad (6)$$

$$5 \cos \alpha - 3 \sin \alpha \quad (7)$$

نخست چهارم.

بستگی های میان گوشه ها و چپلوهای یک سه بر
گشایش سه برهای غیر راست گوشه

در کتاب مثلثات سال چهارم (صفحه ۴ بعد) دیدیم که میان پهلوه و گوشه های یک سه بر راست گوشه بستگی هائی هست (بستگی های ۳۱ تا ۳۵ از همین کتاب) و در ضمن چپار مثال دیدیم که از روی آن بستگی ها میتوان سه بر را (در حالتها ساده) گشود.

اینک میخواهیم بستگی هائی میان گوشه ها و چپلوهای یک سه بر غیر راست گوشه یافته از روی آن به گشایش سه برها پردازیم.
این بستگی ها را بشکل چند قضیه بیان می کنیم:

۱۳- قضیه ۱- قضیه سینوس ها - در ازای چپلوهای هر سه بر قائم است
با سینوس گوشه های روبروی آن چپلوها و نسبت در ازای هر پهلوی سینوس گوشه روبروی آن برابر است با در ازای میان بر دایره محیطی سه بر:

$$(۴۱) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

برای ثابت کردن قضیه دایره محیطی سه برابر کشیده و مثلث میان نبری را

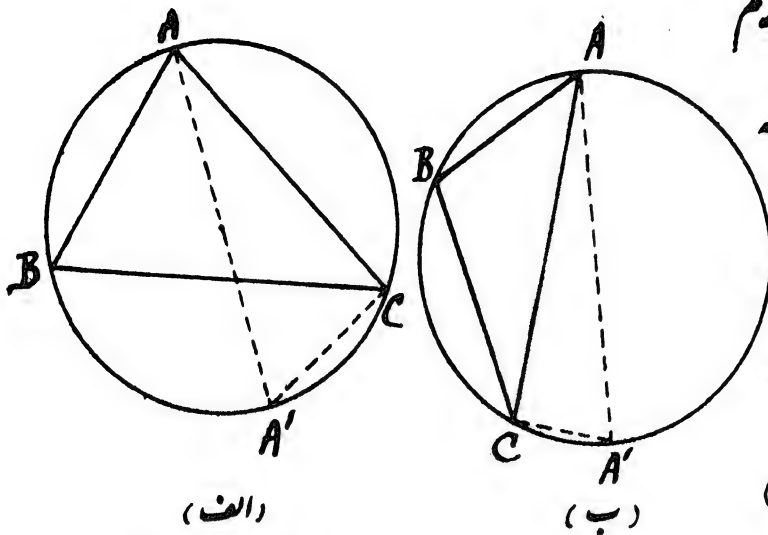
که از A میگذرد میکشیم

تا پیرامون دایره را در نقطه

دیگری مانند A' ملاتی

کند. در سه برابر است گوشه

ACA' (گوشه را)



AA' برابر 2R و AC برابر c و گوشه A' یا برابر B است (اگر B

تیز باشد مانند شکل الف) و یا منکمل B است (اگر B باز باشد مانند شکل ب)

$$\sin B = \sin \angle A A' C$$

در هر دو حالت

حال در این سه برابر است گوشه داریم:

$$AC = c = 2R \sin \angle A A' C = 2R \sin B$$

$$\frac{c}{\sin B} = 2R$$

و یا

و همین روال از سه برابر AAB بدست میآید:

$$\frac{c}{\sin C} = 2R$$

و همچنین مثلاً از کشیدن میانبر BB' بستگی $\frac{c}{\sin A} = 2R$ نمایانده میشود

تبصره ۱- از روی قضیه سینوس ها دو بستگی میان پهلو ها و گوشه های یک

سه بر دست آمد و در هندسه دیده ایم که میان گوشه ها هم یک بستگی هست:

$$A + B + C = 180^\circ$$

پس همیشه سه بستگی میان پهلو ها و گوشه های هر سه بر موجود است و بنابراین هرگاه سه جز از ۶ جز اصلی یک سه گوشه را داشته باشیم (که دست کم یکی پهلو باشد) میتوان سه جز دیگر آنرا از روی این سه بستگی حساب کرد (یعنی سه بر را کشود) چنانکه در هندسه هم دیده ایم که با داشتن سه جز (که دست کم یکی پهلو باشد) میتوان درجات کلی سه گوشه را کشیده جزو های ناشناس را اندازه گرفت.

تبصره ۲- روشن است که بستگیهای بالا برای یک سه بر است گوشه هم

در دست است:

اگر α را گوشه راست بگیریم بستگی های بالا بصورت بستگیهای (۳۲) (۳۳)

و (۳۴) درمیآید.

۱۵- از روی قضیه سینوس ما هرگاه

- ۱- از سه بری یک پهلوی و دو گوشه را بشناسیم ما هرگاه
- ۲- از سه بری دو پهلوی و گوشه روبروی یکی از آن دو را بشناسیم میتوان آن
بررآشود:

حالت نخست - از سه بری پهلوی a و دو گوشه A و B را میشناسیم
گشایش سه بر - گوشه C از روی دستور

$$C = 180 - (A + B)$$

به دست میآید.

برای یافتن پهلوی c و C بستگی های سینوس ها (بستگی های ۴۱) را بکار
میبریم:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

در تناسب نخست ما ناشناس است و سه جز و دیگر را می شناسیم و از تناسب دوم
هم تنها c را نمی شناسیم - بنابراین از روی این دو تناسب میتوان c و C را (و همچنین

لکاریم (بدست آورد):

$$\log b = \log a + \operatorname{colog} \sin A + \log \sin B$$

$$\log c = \log a + \operatorname{colog} \sin A + \log \sin C$$

مثال $a = ۲۵۲,۷۵$ متر $\hat{A} = ۳۰^{\circ} ۱۷' ۶''$, $\hat{B} = ۲۵^{\circ} ۲۴' ۵۲''$

بخواهیم c و b را حساب کنیم.

گشایش مسئله باید به ترتیبی انجام شود که در صفحه ۷۲ نوشته شده.

وزرش

سه برای زیر را بکشاید.

$$(۱) \quad a = ۳۳,۲۳۶ \text{ متر} \quad , \quad B = ۱۵^{\circ} ۴۹' \quad , \quad C = ۳۶^{\circ} ۱۷' ۶''$$

$$(۲) \quad b = ۱۷۶۹ \quad , \quad C = ۳۰^{\circ} ۱۶' ۷۵'' \quad , \quad A = ۱۵^{\circ} ۲۷' ۵۰''$$

$$(۳) \quad c = ۱۸۷۵۶ \quad , \quad A = ۳۰^{\circ} ۱۸' ۴۹'' \quad , \quad B = ۱۶^{\circ} ۱۸' ۶۸''$$

حالت دوم - از سه برای دو پهلوی a و b و گوشه A (روبرویه a)

را می‌شناسیم.

گشایش - گوشه B از دستور

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} \quad \text{و یا} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

بدست میآید:

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A + \operatorname{colog} a$$

پس از B گوشه C بدست میآید

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \quad \text{پس } c \text{ از روی}$$

$$\log c = \log a + \log \sin C + \operatorname{colog} \sin A$$

مثال

$$A = 21^\circ 15' 27''; \quad b = 11, 706; \quad a = 12, 372$$

$$\log b = 1, 27203$$

$$\log \sin A = \bar{1}, 79112$$

$$\operatorname{colog} a = \bar{1}, 90752$$

$$\log \sin B = \bar{1}, 97121$$

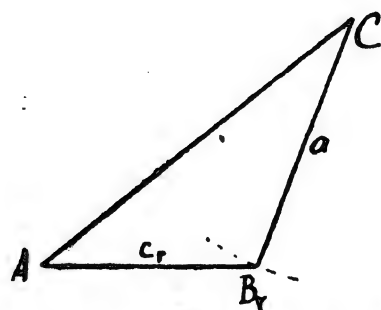
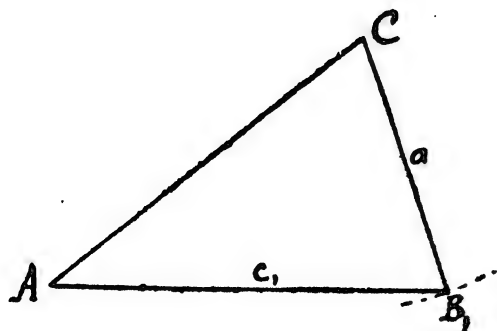
$$B = 69^\circ 15' 26''$$

ولی B که از زوی نگاریم « سینوس » بدست میاید می تواند دارای دو مقدار باشد:

$$B_1 = 26^\circ \quad 25' \quad 69''$$

$$B_2 = 180^\circ - B_1 = 11^\circ \quad 24' \quad 24''$$

(B_1 و B_2 هر دو دارای یک سینوس و بنابراین دارای یک نگاریم سینوس میباشند)
 حال برای اینکه ببینیم آیا B_1 و B_2 هر دو پاسخ میباشند یا یکی از آنها کافی است
 در نظر داشته باشیم (بند سه سال دوم شماره ۱۸) که هرگاه گوشه داد شده باشد
 باشد و پهلوی روبروی آن (a) کوچکتر از پهلوی دیگر (c) شاید مسئله دارای دو
 پاسخ باشد یعنی شاید با آنچه داریم بتوانیم دو سه برکشیم - پس این جا هم B پاسخ است و هم
 B_1 و بنابراین C هم دارای دو مقدار C_1 و C_2 و نیز دارای دو مقدار c_1
 و c_2 خواهد بود (شکل)



کتابش و ترتیب آن در صفحه ۷۵ نوشته شده است

حالت نخست - نمایش سه بری که یک پهلو و دو گوشه آن داده شده

$$\left. \begin{array}{l} \text{ش } 312,59 = b \\ \text{ش } 255,22 = c \\ 64^\circ 1' 5'' = C \end{array} \right\} \text{پنج} \quad \left. \begin{array}{l} C = 180^\circ - (A+B) \\ b = \frac{a \sin B}{\sin A} \\ c = \frac{a \sin C}{\sin A} \end{array} \right\} \text{دستور} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ش } 252,75 = a \\ 62^\circ 17' 2'' = A \\ 52^\circ 24' 15'' = B \end{array} \right\} \text{اشد}$$

محاسبه های اصلی	محاسبه های فرعی
<p style="text-align: center;"><u>محاسبه b</u></p> $\begin{array}{r} 2,54747 \\ \bar{1},19919 \\ \hline 1,04900 \end{array}$ $\log b = 2,49626$ $\begin{array}{r} 49626 \quad 3135 \quad (D=14) \\ 12 \quad 9 \\ \hline b = 312,59 \end{array}$	$A+B = 115^\circ 51' 5'' \quad C = 64^\circ 1' 5''$ $\begin{array}{r} 3527 \quad 54741' \\ 5 \quad 6 \quad (D=12) \\ \hline \log a = 2,54747 \end{array}$ $\begin{array}{r} 62^\circ 17' \quad \bar{1},95097 \quad (D=6) \\ 2'' \quad 2 \end{array}$ $\begin{array}{l} \log \sin A = \bar{1},95100 \\ \operatorname{colog} \sin A = 2,04900 \end{array}$ $\begin{array}{r} 52^\circ 24' \quad \bar{1},19915 \quad (D=10) \\ 15'' \quad 2 \end{array}$ $\begin{array}{l} \log \sin B = \bar{1},19919 \\ 62^\circ 1' \quad \bar{1},95415 \quad (D=6) \\ 5'' \quad 5 \end{array}$ $\begin{array}{l} \log \sin C = \bar{1},95416 \end{array}$
<p style="text-align: center;"><u>محاسبه c</u></p> $\begin{array}{r} 2,54747 \\ \bar{1},95416 \\ \hline 1,04900 \end{array}$ $\log c = 2,55062$ $\begin{array}{r} 55060 \quad 2552 \quad (D=12) \\ 2 \quad 20 \end{array}$ $c = 355,22$	

حالت دوم: کشایش سه بری که دو پهلو و گوشه روبرویی از آن دو داده شده.

$$\left. \begin{array}{l} 69^\circ 26' 26'' = B_1 \\ 72^\circ 18' 57'' = C_1 \\ 19.38 = c_1 \\ 11^\circ 24' 24'' = B_2 \\ 21^\circ 1' 9'' = C_2 \\ 1.1222 = c_2 \end{array} \right\} \text{ پاسخ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin B = \frac{b \sin A}{a} \\ C = 180^\circ - (A+B) \\ c = \frac{a \sin C}{\sin A} \end{array} \right\} \text{ دستور}$$

$$\left. \begin{array}{l} 12.373 = a \\ 18.706 = b \\ 31^\circ 15' 27'' = A \end{array} \right\} \text{ داشته}$$

محاسبه های اصلی	محاسبه های فرعی
<p><u>محاسبه B</u></p> $\begin{array}{r} 1.272.3 \\ 1.791.82 \\ 1.90.752 \\ \hline \log \sin B = 1.971.31 \\ 9.7135 \end{array}$ <p>(D=5) $\frac{2}{3}$</p> <p>$B_1 = 69^\circ 26' 26''$</p> <p>$B_2 = 11^\circ 24' 24''$</p>	<p>(D=35) $\frac{12.37}{2} = \frac{0.9237}{1.08}$</p> <p>$\log a = 1.09248$</p> <p>$\text{colog } a = 1.90752$</p> <p>(D=32) $\frac{18.706}{6} = \frac{2.7184}{1.92}$</p> <p>$\log b = 1.272.3$</p> <p>(D=16) $\frac{31^\circ 15' 27''}{2} = \frac{1.79176}{52}$</p> <p>$\log \sin A = 1.79182$</p> <p>$\text{colog } \sin A = 2.20817$</p> <p>(D=2) $\frac{72^\circ 18' 57''}{57} = \frac{1.97189}{4}$</p> <p>$\log \sin C_1 = 1.97189$</p> <p>(D=21) $\frac{21^\circ 1' 9''}{9} = \frac{1.71392}{4}$</p> <p>$\log \sin C_2 = 1.71392$</p> <p>(D=22) $\frac{1.1252}{9} = \frac{1.034}{2}$</p> <p>$c_2 = 1.2342$</p>
<p><u>محاسبه C₁ و C₂</u></p> $\begin{array}{r} 1.09248 \\ 1.97189 \\ 2.20817 \\ \hline \log c_1 = 1.27954 \end{array}$ <p>(D=23) $\frac{944}{19} = \frac{19.2}{8}$</p> <p>$C_1 = 19.38$</p>	
<p><u>محاسبه c₂</u></p> $\begin{array}{r} 1.09248 \\ 1.71392 \\ 2.20817 \\ \hline \log c_2 = 1.01461 \end{array}$	

بصره - در هر شمال عددی بهترین است که پیش از کُشایش مثلثاتی کُشش کنیم
 سه برنامشناس ۱۱ از راه هندسی گشتایم از نیزه دست کم میتوان پی برد بانیکه مسئله
 کُشایش پذیر هست یا نیست یا اینکه چند پاسخ خواهد داشت - و اگر کُشایش هندسی با
 دقت باشد میتوان دستی محاسبه های مثلثاتی را نیز از روی آن بررسی نمود.

ورزش

سه برای زیر را بکشید:

$$20^\circ \quad 25^\circ \quad 30^\circ = A \quad 1,2193 = C \quad 6,1756 = \alpha \quad (1)$$

$$30^\circ = B \quad 6,212 = C \quad 7,156 = C \quad (2)$$

$$40^\circ \quad 50^\circ = B \quad 27,80 = \alpha \quad 10,72 = C \quad (3)$$

$$110^\circ \quad 30^\circ = C \quad 75,76 = C \quad 62,952 = \alpha \quad (4)$$

$$100^\circ = B \quad 65 = C \quad 70 = \alpha \quad (5)$$

۱۶- قضیه ۲- در هر سه بر نسبت مجموع دو پهلو به تفاضل آنها برابر است

با نسبت تانژانت نیمه مجموع گوشه های روبرو به آن پهلوها به نیمه تانژانت
 تفاضل همان دو گوشه یعنی :

$$(۴۲) \left\{ \begin{array}{l} \frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} \\ \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}} \\ \frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{C-A}{2}}{\operatorname{tg} \frac{C+A}{2}} \end{array} \right.$$

برای نمایاندن دستی تناسب نخست تناسب

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

انجام می‌بریم:

از روی این تناسب بترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{a+b} &= \frac{\sin A - \sin b}{\sin A + \sin B} \\ &= \frac{2 \sin \frac{A-B}{2} \cdot \cos \frac{A+B}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \cot \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} \end{aligned}$$

۱۷- هرگاه از سه بری دو پهلو و گوشه میان آن دو پهلو را بشناسیم
 میتوان از روی قضیه ۲ جزئیاتی شناس آن سه بر را (بگفت لگاریتم) حساب نمود
 (حالت سوم کشایش سه بر):

مثلاً اگر a و b و گوشه C را بشناسیم کشایش سه بر ترتیب زیر خواهد بود
 (از دو پهلو داده شده آن را که بزرگتر است a منایم نابراین A نیز از B
 بزرگتر است):

نخست A و B را حساب می‌کنیم - چون C داده میشود پس $A + B$ را میشناسیم:

$$A + B = 180^\circ - C$$

$A - B$ هم از روی قضیه ۲ بدست میآید:

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$$

در این همچندی میتوان بجای $\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$ برابرش $\cot \frac{C}{2}$ را نهاد زیرا

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} \quad \text{پس}$$

هر دو طرف این همچندی بنا بر فرض مثبت است و میتوان از آن لگاریتم گرفت

$$\log \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \log(a-b) + \operatorname{colog}(a+b) + \log \cot \frac{C}{2}$$

وقتی که بدین ترتیب $\frac{A-B}{2}$ را حساب کردیم گوشه‌های A و B بدست می‌آید

اگر مثلاً $\frac{A-B}{2}$ برابر α باشد از روی

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

$$\frac{A-B}{2} = \alpha$$

$$A = 90^\circ - \frac{C}{2} + \alpha \quad \text{خواهیم داشت:}$$

$$B = 90^\circ - \frac{C}{2} - \alpha$$

پس c از روی قضیه سینوس احساب می‌شود مثلاً

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

مثال $\alpha = 47,6.3^\circ$ تر $b = 38,748$ تر $C = 24^\circ 22' 10.7''$

گشایش و ترتیب آن در صفحه ۸۸ نوشته شده است.

وزرش

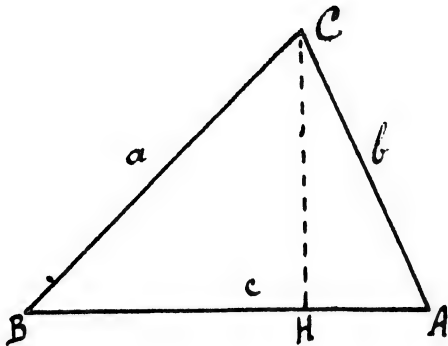
به برای زیر را بکشید:

$$(1) \quad a = 716,75 \quad b = 292,52 \quad C = 24^\circ 22' 52''$$

$$۴۰^\circ \quad ۳۷^\circ ۲۰' = A \quad , \quad ۱۱۵,۷۵ = c \quad , \quad ۷۵,۸۰ = b \quad (۲)$$

۱۸- قضیه ۲- قضیه سینوس متتم ن- در بند سه دیده ایم که هرگاه گوشه

B تند باشد

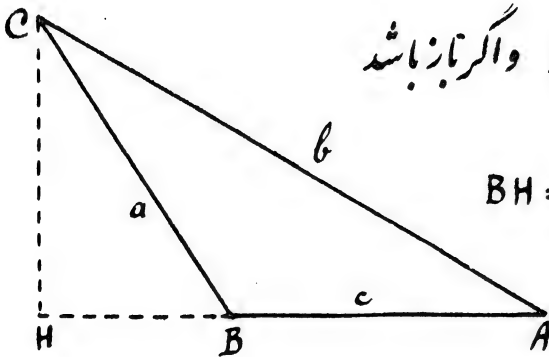


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2c \cdot BH$$

و سرگاه B باز باشد

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2c \cdot BH$$

ولی اگر B تند باشد $BH = a \cos B$ و اگر باز باشد



$$BH = a \cos \widehat{CBH} = a \cos (180^\circ - B) = -a \cos B$$

بنابراین خواه B تند باشد یا باز

$$c^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \quad \text{و همین‌وال :$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

یعنی در هر سه بتوان دوم هر یک از پهلوها (خواه گوشه روبروی آن تند باشد خواه باز) برابر است با مجموع توانهای دوم دو پهلوئی دیگر منهای

و برابر حاصل ضرب آن دو پهلو در سینوس متمم گوشه میان آن دو.

۱۹- هرگاه سه پهلو ی یک سه برابر باشند میتوان از روی قضیه سینوس

متمم ها سه برابر گوشه های آنرا حساب کرد (حالت چهارم کشایش سه بزرگ):

اگر a و b و c پهلوهای سه برابر باشند A مثلاً از دستور

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{حساب میشود:}$$

و همچنین گوشه های دیگر.

عیب این دستور این است که عبارت طرف دوم آن محاسبه پذیر با لگاریتم نیست

ولی میتوان ترتیب زیر گوشه ها را بگذاشت محاسبه نمود:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{چون}$$

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{پس}$$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$$

حال اگر $a + b + c$ یعنی درازای پیرامون سه برابر 2 بنامیم s :

$$a + b + c = 2r$$

$$a - b + c = 2r - 2b = 2(r - b)$$

$$a + b - c = 2r - 2c = 2(r - c)$$

$$-a + b + c = 2r - 2a = 2(r - a) \quad \text{و همچنین}$$

پس

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2(r - b)(r - c)}{bc}$$

و همین ترتیب خواهیم دید که

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A = \frac{2r(r - a)}{bc}$$

و همچنین $\cos^2 \frac{C}{2}$ ، $\sin^2 \frac{C}{2}$ ، $\cos^2 \frac{B}{2}$ ، $\sin^2 \frac{B}{2}$

میآید پس با در نظر گرفتن اینکه $\frac{C}{2}$ ، $\frac{B}{2}$ ، $\frac{A}{2}$ هر سه تند میباشند

خواهیم داشت:

$$(۲۳) \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{A}{2} = + \sqrt{\frac{(r - b)(r - c)}{bc}} \\ \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(r - c)(r - a)}{ca}} \\ \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(r - a)(r - b)}{ab}} \end{array} \right.$$

$$(۴۴) \left[\begin{aligned} \cot \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \cot \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}} \\ \cot \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{aligned} \right.$$

از روی هر یک از این دستورها میتوان گوشه‌ها را بکلیت لگاریتم حساب کرد مثلاً

$$\log \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} [\log(p-b) + \log(p-c) + \operatorname{colog} b + \operatorname{colog} c]$$

و زرش - چه گوشه‌ایست که لگاریتم سینوس آن ۳۸۹۹۹۱۳ است ؟

لگاریتم سینوس متمم آن ۹۰۹۹۹۹۰ است ؟

لگاریتم تانژانت آن ۵۹۰۵۵۰ است ؟

از روی این زرش می‌پسینم که محاسبه یک گوشه بکلیت لگاریتم تانژانت و

تانژانت متمم آن دقیق‌تر از محاسبه همان گوشه بکلیت لگاریتم سینوس آن یا سینوس متمم آنست

بنابراین بهترین است که $\frac{A}{2}$ و $\frac{B}{2}$ و $\frac{C}{2}$ را حساب

کنیم و برای این کار کافی است که دو طرف هر یک از دستورهای (۴۳) را

بر دو طرف نظیر آن از دستورهای (۴۴) بخش نماییم :

$$(۴۵) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(r-b)(r-c)}{r(r-a)}} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(r-a)(r-c)}{r(r-b)}} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(r-a)(r-b)}{r(r-c)}} \end{cases}$$

بعلاوه اگر از نظر محاسبه گوشه دستورهای (۴۲) و (۴۴) و (۴۵) را با هم
 بسنجیم می بینیم اگر بنخواهیم گوشه مارابه گشت دستورهای (۴۳) بدست آوریم باید
 لگاریتم حساب کنیم:

لگاریتم های a و b و c و $r-a$ و $r-b$ و $r-c$
 و اگر بنخواهیم دستورهای (۴۴) را بکار ببریم علاوه بر این شش لگاریتم $\log r$ را باید نیز بگیریم.
 ولی با دستورهای (۴۵) داشتن چهار لگاریتم (لگاریتم های $r-a$ و $r-b$ و

$r-c$ و r) کافیست.

اگر $\sqrt{\frac{(r-a)(r-b)(r-c)}{r}}$ را e بنامیم

$$(۴۶) \quad e = \sqrt{\frac{(r-a)(r-b)(r-c)}{r}}$$

دستورهای (۴۵) چنین نوشته میشود:

$$(۴۷) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{e}{r-a} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{e}{r-b} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{e}{r-c} \end{cases}$$

پس برای آسان نمودن محاسبه گوشه ها نخست $\log r$ را حساب میکنیم

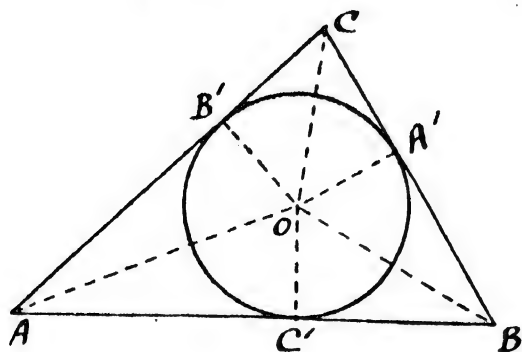
$$\log r = \frac{1}{3} \left[\log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) + \operatorname{colog} p \right]$$

و سپس خواهیم داشت:

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-a)$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-b)$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-c)$$



توضیح - هرگاه دایره محاطی

سه بر ABC را بکشیم و مرکز آن O

و نقطه های تماس آن را با پهلوهای BC و

CA و AB به ترتیب A' و B' و C' بنامیم با سالی می بینیم که

$$AB' = AC' = p - a$$

$$BC' = BA' = p - b$$

$$CA' = CB' = p - c$$

پس مثلاً در سه بر راست گوشه AOB' که گوشه $\widehat{OAB'}$ برابر $\frac{A}{2}$ است خواهیم داشت:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{OB'}{A-a}$$

که در آن OB' پرتو دایره محاطی است. از منجبدن این بسکتی با بسکتی نخست از دستور (۴۷) چنین برمیآید که γ همانا پرتو دایره محاطی سه برست.

مثال - مطلوبست گشایش سه بری که پهلوی آن داده میشود:

$$50.69, 9 = c \quad 4392, 17 = b \quad 2763, 45 = a$$

گشایش و ترتیب آن در صفحه ۸۹ نوشته شده است.

ورزش

سه برای زیر را کث بند:

$$52, 762 = c \quad 61, 025 = b \quad 72, 159 = a \quad (1)$$

$$12822 = c \quad 9673 = b \quad 10780 = a \quad (2)$$

$$6 = c \quad 5 = b \quad 4 = a \quad (3)$$

۲۰. خلاصه - ما بیداره گشایش سه بر را در چهار حالت ساده بیا منوریم:

نخست - اگر یک پهلود و گوشه از سه برابر بشناسیم

دوم - اگر دو پهلود و گوشه روبرو یکی از آن دورا (حالت بنام)

سوم - دو پهلو و گوشه میان آن دورا .

چهارم - اگر سه پهلو را بشناسیم .

چنانکه دیدیم :

در دو حالت نخست دوم گشایش سه برابر زوی قضیه سینوس انجام میشود

در حالت سوم گوشه ها را نخست از زوی قضیه ۲ صفحه ۷۶ و سپس پهلو ی سوم را از زوی قضیه سینوسها حساب می کنیم .

در حالت چهارم دستورهای (۴۶) و (۴۷) را بکار میبریم .

تبصره - هرگاه اندازه جزئی دایره داده شده عددی ساده باشد در دو حالت

سوم و چهارم نخست قضیه سینوس متهم را بکار میبریم و سپس اگر لازم باشد قضیه

سینوسها را .

پهنه سه بر ها

۲۱- الف - سه بر راست گوشه - اگر گوشه راست c بنامیم بنیم

که h پهنه سه بر راست گوشه چنین است :

$$h = \frac{1}{2} ab$$

حالت سوم: شایسته بررسی که دو پهلو و گوشه بیان نداداده شده.

$$\left. \begin{array}{l} 40^\circ \quad 27' \quad 24'' = A \\ 32^\circ \quad \quad \quad 12'' = B \\ 69,778 = C \end{array} \right\} \text{بخش} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} \\ \log \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} \\ c = \frac{a \sin C}{\sin A} \end{array} \right\} \text{دستور}$$

$$\left. \begin{array}{l} 47,602 = a \\ 38,741 = b \\ 107 \quad 22' \quad 14'' = C \end{array} \right\} \text{اشته}$$

محاسبه‌های اصلی	محاسبه‌های فرعی
<p>محاسبه $\frac{A-B}{2}$ و A و B</p> $\log \frac{A-B}{2} = \frac{2,94719}{2,186625} = 2,186625$ <p>(D=19)</p> $\frac{A-B}{2} = 40^\circ 18' 36''$ $\frac{A+B}{2} = 36^\circ 18' 48''$ $A = 40^\circ 27' 24''$ $B = 32^\circ \quad 12''$	<p>$a-b = 1,155$</p> $\log(a-b) = 2,94719$ <hr/> <p>$a+b = 1,2351$</p> <p>(D=7)</p> $\log(a+b) = 2,186625$ $\cot \frac{C}{2} = 2,186625$ <hr/> <p>$\frac{C}{2} = 52^\circ 41' 12''$</p> <p>(D=27)</p> $\log \cot \frac{C}{2} = 2,186625$ <hr/> <p>(D=9)</p> $\log a = 1,67764$ <hr/> <p>$180^\circ - C = A+B = 72^\circ 27' 24''$</p> <p>(D=4)</p> $\log \sin C = 2,97972$ <hr/> <p>(D=14)</p> $\log \sin A = 2,186625$ $\cot \log \sin A = 2,186625$
<p>محاسبه C</p> $\log c = \frac{1,67764}{1,186625} = 1,186625$ <p>(D=6)</p> $c = 69,778$	

حالت چهارم - گشایش سه بری له پیلوهای آن داده شده:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$\left. \begin{aligned} \lg \frac{A}{r} &= \frac{r}{p-a} \\ \lg \frac{B}{r} &= \frac{r}{p-b} \\ \lg \frac{C}{r} &= \frac{r}{p-c} \end{aligned} \right\} \text{دستور}$$

یا

$$\left. \begin{aligned} A &= ۴۶^{\circ} ۱۱' ۱'' \\ B &= ۵۷^{\circ} ۲۲' ۵۲'' \\ C &= ۲۵^{\circ} ۲۵' ۵۰'' \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{۱۷۹^{\circ} ۵۹' ۵۰''}{۱۷۹^{\circ} ۵۹' ۵۰''}$$

$$\left. \begin{aligned} ۳۷۶۳,۲۵ &= a \\ ۴۴۹۲,۱۷ &= b \\ ۵۰۶۹,۹۰ &= c \end{aligned} \right\} \text{داده شده}$$

$$\begin{aligned} ۱۴۲۲۶,۲۲ &= ۲p \\ ۶۶۱۳,۱۱ &= p \\ ۲۸۴۹,۶۶ &= p-a \\ ۲۲۲۰,۲۴ &= p-b \\ ۱۵۴۳,۲۱ &= p-c \\ ۶۶۱۳,۱۱ &= p \end{aligned}$$

محاسبه های اصلی	محاسبه های فرعی
$\frac{A}{r}$ محاسبه $\frac{۳.۰۸۴۶.}{\bar{۴}.۵۴۵۲۱}$ $\lg \lg \frac{A}{r} = \frac{\bar{۱}.۶۲۹۸۱}{\bar{۱}.۶۲۹۶۱} \quad ۲۲^{\circ} ۵'$ $\frac{A}{r} = \frac{۲۴^{\circ} (D=۲۵)}{۲۴^{\circ} ۵' ۲۴''}$	$\frac{۶۶۱۳}{۱۲.۴.} \quad (D=۶)$ $\frac{\lg p}{\lg p} = \frac{۳.۱۲۰۴۱}{\bar{۴}.۱۷۹۵۹}$ $\frac{۲۸۴۹}{۴.۶.} \quad (D=۱۵)$ $\frac{\lg(p-a)}{\lg(p-a)} = \frac{۳.۴۵۴۷۹}{\bar{۴}.۵۴۵۲۱}$
$\frac{B}{r}$ محاسبه $\frac{۳.۰۸۴۶.}{\bar{۴}.۶۵۳۶.}$ $\lg \lg \frac{B}{r} = \frac{\bar{۱}.۷۳۸۸۲.}{\bar{۱}.۷۳۸۰۷} \quad ۲۸^{\circ} ۴۱'$ $\frac{B}{r} = \frac{۲۸^{\circ} ۴۱' (D=۲۰)}{۲۸^{\circ} ۴۱' ۲۵''}$	$\frac{۲۲۲.}{۲.۴.} \quad (D=۲۰)$ $\frac{\lg(p-b)}{\lg(p-b)} = \frac{۳.۳۶۶۴.}{\bar{۴}.۶۵۳۶.}$
$\frac{C}{r}$ محاسبه $\frac{۳.۰۸۴۶.}{\bar{۴}.۸۱۱۵۷}$ $\lg \lg \frac{C}{r} = \frac{\bar{۱}.۸۹۶۱۷}{\bar{۱}.۸۹۵۹۳} \quad ۳۸^{\circ} ۱۲'$ $\frac{C}{r} = \frac{۳۸^{\circ} ۱۲' (D=۲۶)}{۳۸^{\circ} ۱۲' ۵۵''}$	$\frac{۱۵۴۳}{۲.۱۸۸۳۷} \quad (D=۲۸)$ $\frac{\lg(p-c)}{\lg(p-c)} = \frac{۳.۱۸۸۳۳}{\bar{۴}.۸۱۱۵۷}$
	$\frac{۳۴۵۴۷۹}{۳.۳۶۶۴.}$ $\frac{۳.۱۸۸۳۳}{\bar{۴}.۱۷۹۵۹}$ $\frac{۲ \log 2}{\log 2} = \frac{۶.۱۶۹۲۱}{۳.۰۸۴۶.}$

پس اگر دو پهلوی گوشه راست را بشناسیم (حالت نخست از کشایش سه بره‌ای است گوشه) همین دستور را بکار می‌بریم.

و اگر وتر c و یک گوشه مثلاً A را بشناسیم (حالت دوم) کافی است دستور بالا بجای a و c بر طبق $c \sin A$ و $c \cos A$ بگذاریم.

$$a = \frac{1}{4} c^2 \sin A \cos A$$

$$= \frac{1}{4} c^2 \sin 2A$$

و اگر یکی از دو پهلوی گوشه راست مثلاً a و یکی از دو گوشه تند مثلاً B

بشناسیم (حالت سوم) کافیست دستور $a \operatorname{tg} B = \frac{a^2}{4}$ بجای c برابرش را بگذاریم:

$$a = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{tg} B$$

و اگر وتر و یکی از دو پهلوی گوشه راست مثلاً c را بشناسیم بجای a می‌گذاریم

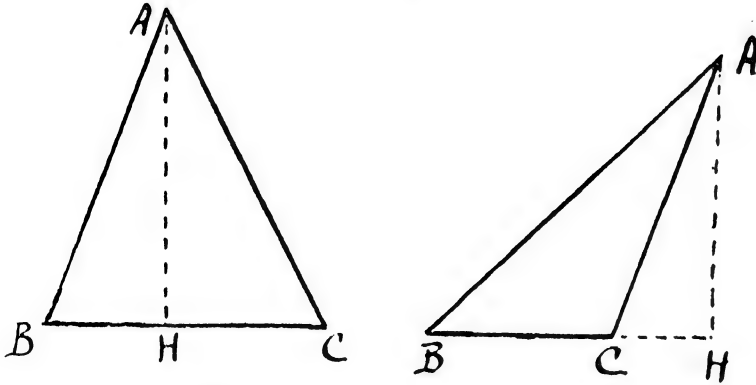
$$: \sqrt{(c+b)(c-b)}$$

$$a = \frac{1}{4} c \sqrt{(c+b)(c-b)}$$

۱۲- ب. - پهنه سه بره‌ای غیر راست گوشه - می‌دانیم پهنه سه بره‌ای ABC

$$J = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} a \cdot h$$

(شکل)



ولی $\frac{1}{2} ac \sin B$ با $\frac{1}{2} ab \sin C$ (خواه گوشه B یا C تند باشد)

یا باز پس

$$(۴۸) \quad \begin{cases} J = \frac{1}{2} ac \sin B \\ J = \frac{1}{2} ab \sin C \\ J = \frac{1}{2} bc \sin A \end{cases}$$

و همچنین

یعنی پهنه هر سه برابر است با نیمه حاصل ضرب درازای دو پهلوی آن و سینوس گوشه میان آن دو پهلو.

این دستور را بکار می‌بریم هرگاه از سه بر دو پهلو و گوشه میان آن‌ها را بشناسیم (حالت

سوم گشایش سه بر دو).

اگر دو گوشه و یک پهلو از سه بر (مثلاً a و A و B) را بشناسیم (حالت

کافیت در دستور $\frac{1}{4} ac \sin B$ بجای c برابرش $\frac{a \sin C}{\sin A}$ را بگذاریم:

$$\frac{1}{4} a^2 \frac{\sin C \sin B}{\sin A} = \frac{1}{4} a^2 \frac{\sin(A+B) \sin B}{\sin A}$$

اگر سه ضلعی a و b و c از یک سه برابشناسیم نخست مثلاً در دستور

$$\frac{1}{4} ab \sin C$$
 بجای C برابرش $\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$ را گذارده سپس بجای $\sin \frac{C}{2}$

و $\cos \frac{C}{2}$ برابرهای آنها را بحسب ضلعها میگذاریم (دستورهای ۴۳ و ۴۴):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} ab \sin C &= ab \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= ab \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \times \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{aligned}$$

و یا

$$(۴۹) \quad s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

اگر دو ضلع و گوشه روبرو یکی از آن دو مثلاً a و b و A را بشناسیم

(حالت دوم) نخست باید جزئیات شناختن سه برابرست آورد و سپس مثلاً وقتی که C

بدست آید دستور $\frac{1}{4} ab \sin C$ را بکاربرد. میتوان نیز پس از بدست آوردن c

دستور (۴۹) را بکاربرد

تبصره - میتوان دستور (۴۹) را باسانی از راه بندی بیست آورد:

در شکل شماره ۱۹ پهنه سه بر ABC برابر است با مجموع پهنه سه برهای AOB و

COA و BOC

$$\begin{aligned}
 &= \frac{AB \times OC'}{2} + \frac{BC \times OA'}{2} + \frac{CA \times OB'}{2} \\
 &= \frac{c \times r}{2} + \frac{a \times r}{2} + \frac{b \times r}{2} \\
 &= \frac{r \cdot (a + b + c)}{2} = r \cdot p \\
 &= p \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \\
 &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
 \end{aligned}$$

ورزش - حساب کنید پهنه سه برهای ورزشهای پیش را (در چهار حالت گشایش

سه برها) .

ورزش

۱. حساب کنید پهنه سه بری (متوازی الاضلاعی را) که دو پهلوهای آن a و b

و گوشه میان آنها C میباشد

۲. پهنه یک سه گوشه متساوی الساقین $\frac{1}{\sqrt{3}}$ متر مربع و قاعده آن ۲۰ متر است

کنید گوشه های آنرا.

۳- حساب کنید پرتو دایره محاطی سه گوشه ای را که پهلوهای آن ۴ و ۵ و ۶ می باشد.

۴- زمینی است بشکل سه گوشه که یکی از پهلوهای آن ۵۰۰ متر و دو گوشه مجاور بدان پهلو

رتیب ۵۴ و ۷۰ می باشد. این زمین چند هکتار است؟

۵- زمینی است بشکل سه گوشه ABC که پهلوهای آن $a = ۱۲۵۰$ متر $b =$

یک کیلومتر $c = ۱۵۰$ کیلومتر می باشد حساب کنید گوشه C و پهنه زمین را.

۶- دو نقطه A و B در دو طرف دریاچه ای می باشند و میخواهیم دوری آنها را از هم

اندازه بگیریم. برای اینکار نقطه ای C می گیریم بستی که شود دوری آنرا از A و B اندازه

گرفت :

$$AC = ۹۷,۵$$

$$BC = ۸۳,۲۵$$

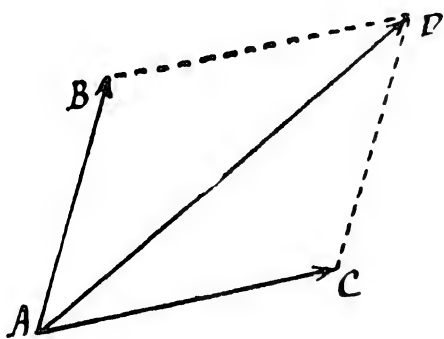
گوشه میان CA و CB را هم اندازه بگیریم: $\widehat{ACB} = ۲۸$ ۴۷ حساب کنید

AB را.

۷- بر نقطه ای دو نیس و (قوه) وارد شده کمی برابر ۷ کیلوگرم و دیگری که با نیروی

ست گوشه ۳۸ می سازد برابر ۵ کیلوگرم پیدا کنید اندازه و راستای برآیند این دو نیرو را.

نمونه یک مرور با بسیده برداری مایش می دهند که راستا و سو و اندازه و شش همان راستا و سو و اندازه



برو مانند - در فیزیک ثابت شود

که هرگاه دو بردار \vec{AC} و \vec{AB}

مایش دو نیروی وارد بر A باشد

اثر این دو نیرو برابر اثر تنها نیروی است که بسیده بر آید \vec{AB} و \vec{AC} نموده میشود و میدانیم این بردار \vec{AD} است

۸- دو نیرو بر یک نقطه وارد میشوند و با هم گوشه 60° میسازند - یکی آن دو نیرو دو کیلو

و بردار آن دو سه کیلو است - نیروی دیگر را حساب کنید .

۹- برای یافتن دوری دو نقطه A و B از هر یک خطی از A به نقطه ای C کشیده

AC و گوشه های \widehat{CAB} و \widehat{ACB} را اندازه گرفته ایم: $AC = 250$ متر $\widehat{CAB} = 20^\circ$ و 60°

و $\widehat{ACB} = 17^\circ$ ۵۵ حساب کنید AB را .

۱۰- از زیر پل راه راستی افقی میگذرد - از روی این پل دو سنگ کیلو متر شمار پایی

آنگاه در طرف چپ آویده میشود: آنگاه پل نزدیکتر است با گوشه نشیب 27° و آنگاه دورتر است

با گوشه نشیب 33° ۵۰ (برای تعریف گوشه نشیب کتاب مشقات چهارم صفحه ۴۸ را ببینید)

حساب کنید پندی پل را از راه .

۱۱- برای یافتن بلندی یک بالن گنبدانی گوشه فراز یکی از نقطه های آن C را از دو نقطه

A و B که هر دو در دست میباشد - اندازه گرفته ایم - A و B و C هر سه در یک تار مشغولی

میباشند - گوشه فراز C از A ۳۰° و از B که ۳۰۰ متره خط مشغول C نزدیکتر است

گوشه فراز C ۲۰° میباشد - حساب کنید بلندی بالن را

۱۲- طرف شمالی شیردانی بامی به شیب ۴۰° و به درازای ۵ متر است و طرف جنوبی آن

به درازای ۷ متر است - پهنای بام را از شمال بجنوب حساب کنید .

۱۳- دو نقطه A و B در دو طرف و دخانه ای واقعند و میخواهیم دوری آنها را از

همه گیر اندازه بگیریم - برای این کار در همان طرفی که A واقع است و ۵۰۰ متر دور از آن نقطه ای

C گرفته ایم و دو گوشه \widehat{CAB} و \widehat{ACB} را اندازه گرفته ایم : $\widehat{CAB} = ۲۵^{\circ}$ و $\widehat{ACB} = ۵۲^{\circ}$ و

$\widehat{ACB} = ۵۰^{\circ}$ حساب کنید AB را .

۱۴- تیر سربایت به شیب ۳۷° و به درازای ۹ متر که برای بستن بالای آن در طرف دیگر آن نزدیک

به درازای شش متر و نیم نهاده اند - شیب نردبان را حساب کنید

۱۵- بر نقطه ای دو نیروی \vec{F}_1 و \vec{F}_2 وارد میشود . گوشه میان آنها ۲۰° و ۴۳° و اندازه

\vec{F}_1 دو کیلو بوده برآیند آنها که برابر $۳,۳۵۰$ کیلو باشد \vec{F}_2 گوشه ۲۰° و ۲۱° محاسب کنید

اندازه نیروی \vec{F} را.

۱۶- دو نقطه A و B در دو طرف تپه‌ای واقعند و میخواهیم دوری آنها را از هم دیگر اندازه بگیریم

برای این کار از نقطه‌ای مانند C گوشه \widehat{ACB} و درازای AC و BC را اندازه گرفته ایم: $\widehat{ACB} = ۲۵^\circ$ ۱۱۵

و $AC = ۳۷,۷۰$ متر و $BC = ۶۷,۸۵$ متر حساب کنید AB را

۱۷- برای اینکه دوری دو قایق A و B را از هم دیگر حساب کنیم از نقطه C که در کنار دریاچه باشد

گوشه \widehat{ACB} را اندازه گرفته ایم: $\widehat{ACB} = ۴۰^\circ$ ۳۳ و میدانیم اگر نقطه C تفکیکی خالی کنند صدای آن

آن پس از $\frac{1}{4}$ ثانیه در A و پس از دو ثانیه در B شنیده میشود. حساب کنید AB را در صورتیکه بدانیم تندی صدا ۳۳۹ متر در ثانیه میباشد.

۱۸- در یک هم‌برابر متوازی الاضلاع، درازای یکی از پهلوها ۴٫۵ سانتیمتر و درازای یکی از دو گوشه

(قطر) ۹۳ میلی متر است گوشه میان دو گوشه بر (گوشه دیگر و بر وجه پهلوی داده شده است) ۲۵ ۲۵

میباشد حساب کنید درازای پهلوی و میان برد دیگر را. مسئله چند جواب دارد؟

۱۹- دو نفر که شش کیلومتر از هم جدا شده و در دو برویم ایستاده اند با لونی را که با آنها در یک ماشین غوطه

گوشه های ۶۲° و ۳۷° می بینند حساب کنید بلند می لونی دوری آنرا از هر یک از این دو نفر.

۲۰- زمینی است به شکل سه گوشه ABC بطوریکه $a = ۵۰۴۳$ متر و $b = ۳۰۳۲$ متر و

C = ۱۰ ۶۵ ارزش این مین را حساب کنید و صورتی که بدینم برکتار آن ۱۰۰۰ ریال بریزد مسئله منتهی

۳ از مثلثات کلاس چهارم.

۲۱- برآیند دوی نیروی برابر ۵ کیلوگوشه میان آن دو نیرو ۲۸° است اندازه

هر یک از آنها چیست؟

۲۲- منحنی اهرم دوری دو نقطه A و B را از همدیگر بپایم چون از A نقطه B دیده میشود

یک خط راستی که از A میگذرد و نقطه C و D گرفته ایم هر دو در یک طرف A بطوریکه بتوان آنجا

B را دید و بقسیمی که AC = ۴۵ متر و AD = ۱۵۵ متر $\angle DCB = ۲۷^\circ$ و $\angle CDB = ۲۳^\circ$ و

حساب کنید AB را

۲۳- برآیند دوی نیروی سه پنج کیلوگرمی بهفت کیلوگرم است حساب کنید گوشه میان دوی نیرو

۲۴- سه دایره دودو بهم تماسند و پرتو آنها برابر ۲، ۵ و ۶ سانتیمتر گوشه های

میان خطهای مرکزهای این دایره ها را حساب کنید.

۲۵- گوشه برای یک همدیگر برابر ۷ و ۸ سانتیمتر بوده گوشه میان آن دو ۴۸°

است حساب کنید پهلوهای هر دو برابر.

۲۶- برای اندازه گرفتن فاصله دو نقطه A و B که در دو طرف ساختمانی باشد نقطه ای

۷ گرفته CA ، گوشه \widehat{ACB} را اندازه گرفته ایم: $CA = ۱۷,۸۳۰$ متر و $CB = ۱۴,۹۲۵$ متر

$\widehat{CAB} = ۴۵^\circ ۲۲'$ حساب کنید AB را.

۲۷- در کنار دریاچه ای برجی است به بلندی ۴۵ متر و دقایق A و B دریاچه میباشند

که منجوا بهیم فاصله آنها را از هم دیگر حساب کنیم. برای این کار گوشه نشیب دقایق را از سر برج اندازه می گیریم

یکی ۹ و دیگر ۱۲ است. و نیز از C پای برج گوشه افقی \widehat{ACB} را اندازه میگیریم $\widehat{ACB} = ۴۲^\circ$

حساب AB را.

۲۸- مجسمه ای به بلندی سه متر روی پایه ای به بلندی چهار متر نصب است. در چه نقطه مجسمه و پایه

بیک گوشه دیده میشوند؟

۲۹- از دو نقطه A و B که در کنار رودخانه و در یکطرف آن میباشند نقطه ای C را

که در کنار دیگر رودخانه است می بینیم. با فرض اینکه دوری A از B دویست متر باشد و گوشه های C برود

(شعاع بصیر C از A و از B با AB میانه بترتیب ۲۰° و ۶۰° و ۴۵° باشد حساب

کنید بختی رودخانه را.

۳۰- در کنار یک رودخانه تپه ایست و در بالای تپه برجی به بلندی ۳۰ متر نباشده. از نقطه ای که

کنار دیگر رودخانه و بر روی برج است گوشه های تپه از پای برج و سر آن بترتیب ۴۰° و ۲۵° و

۳۰. ۲۹. میباشد حساب کنید پهنای رودخانه را.

۳۱. هواپیمایی روی یک خط راست حرکت میکند و روی زمین دو نقطه A و B در دست

این خط راست و فاصله ۱۰۰ متر از هم دیگر قرار دارند. در یک لحظه گوشه فرار هواپیمای از دو نقطه A و B

بترقیب ۸۰ و ۱۸ و در دست پس از ۱۵ ثانیه بترقیب ۲۰ و ۵۲ میباشد حساب کنید

هواپیمای را محاسب کنید متر در ساعت.

۳۲. در ساعتی از روز که سایه درختی ده متری چهارده متر میباشد چه اندازه خواهد بود سایه یک

تکه چوب دو متری که ده زینه از شاخول سمبخت خورشید کج است؟

۳۳. زمینی داریم سه گوشه که دو بر آن به دو خیابانست یکی به درازای ۴۳٫۵ متر و دیگری

۵۱٫۷۵ متر. دو خیابان با هم گوشه ۷۰ میسازند و هر متر مربع این زمین ۳۰۰ ریال ارزش دارد.

حساب کنید اگر ۵۰۰۰ ریال داشته باشیم و بخوایم با هم از همین زمین بخریم چه اندازه میتوان

بر ۴۳٫۵ متری را زیاد نمود بدون دست زدن به بر ۵۱٫۷۵ متری.

۳۴. پیرامون سه گوشه ای ۷۰ متر و بلند A از پهلو BC (ارتفاع و دراز

A بر BC) ۲۵ متر و گوشه B برابر ۲۲ و ۴۷ است حساب کنید BC را.

۳۵. شخصی که ۱٫۷۵ متر بلند A دارد و کنار دریا چاهی ایجاد است ساختمانی را به گوشه

فرار ۲۰، ۴۴ و تصویر آن ساختمان را گوشه نشیب ۳۰ ۶۱ می‌پسند. بلندای تاختان را کم کنید

(۳۶۰) - شخصی به بلندی ۸۰ متر روی برجی به بلندی ۱۵ متر ایستاده و میخواهد پهنای دریاچه را

را که نزدیک برج است اندازه بگیرد برای این کار گوشه نشیب نزدیکترین و دورترین نقطه های دریاچه را

(در دو نقطه با چشم بنبیده در یک دامن شاغولی میبایست) اندازه بگیرد به ترتیب ۳۰ ۲۵

و ۲۵ ۱۲ است حساب کنید پهنای دریاچه را.

۳۷ - زمینی است به شکل چهار گوشه $ABCD$ که سه پهلوئی آن را می‌شناسیم $BC =$

۷۳، ۷۰ متر $CD = ۶۲، ۶۵$ متر $DA = ۲۵، ۴۷$ متر و AB را نتوانسته ایم اندازه بگیریم

گوشه های DAC و CBD را نیز داریم $\angle DAC = ۲۳^\circ$ و $\angle CBD = ۲۴^\circ$ حساب

کنید AB را.

۳۸ - میخواهیم ۵۰۰ متر مربع از زمینی را که دو بر آن به خیابانست بخریم کمی از دو بر مجاور خیابان

۱۶ متر و گوشه میان دو خیابان ۸۰ است حساب کنید درازای بری را که در خیابان دیگر است بنا

بر آنکه نخواهیم زمینی را که بخریم سه گوشه باشد.

۳۹ - از سه بری α و β و γ را می‌شناسیم آن سه بر را بکشائید

$$\alpha = ۳۱۶، ۷۳ \quad \beta = ۲۹۱، ۵۴ \quad \gamma = ۲۴ \quad A - B = ۱۷ \quad ۱۵$$

۴۰- از یک زنجی (دو زلفه) دو قاعده AB و CD دو گوشه A و B داده شود

حساب کنید و پهلوی دیگر را .

$$CD = ۳۷,۶۸۰ \text{ متر}$$

$$AB = ۶۵,۳۵۲ \text{ متر}$$

$$B = ۶۳^\circ ۱۷' ۲۴''$$

$$A = ۳۷^\circ ۴۳' ۳۵''$$

۴۱- دو پهلوی یک همروبر (متوازی الاضلاع) ۵۶۷ میلی متر و ۴۳ سانتیمتر

و گوشه میان آن دو پهلوی $۳۹^\circ ۵۴'$ میباشد. حساب کنید درازای گوشه بر قطر، همتی را

۴۲- برای حساب کردن پهنه زمینی که شکل چهار بر $ABCD$ است گوشه برای آن AC

و BD را کشید ایم تا در O برخورد نمایند و OA و OB و OC و OD و گوشه AOB را اندازه

گرفته ایم ترتیب چنین است ۱۷ متر و ۲۲ متر و ۱۶ متر و ۱۴ متر و ۳۰° و ۱۱۰° . حساب

کنید پهنه این زمین را.

۴۳- از ایستگاهی دو ترن در یک آن پروان میسود. یکی بسوی شمال باتندی ساعتی

۴۵ کیلو متر و دیگری بسوی ۴۹ شمال خاوری باتندی ساعتی ۵۵ کیلو متر. حساب کنید فاصله دو ترن

را پس از یک ساعت و نیم.

۴۴- میخواهیم دوری دو نقطه A و B را از یک نقطه C اندازه بگیریم ولی چون

۴۹- سایه دختی که در دامنه تپه است به شیب ۱۸- بهنگامیکه این سایه در روی خط بزرگترین

شیب دامنه افتاده - ۳۳ متر است حساب کنید بلندی درخت را بفرض اینکه در آن هنگام گوشه فراخویش

۳۲ باشد.

۵۰- اگر جاده تهران به اصفهان را شمالی جنوبی بگیریم درستی از راه که اطراف آن دشتی است

افقی دو دایره در دو طرف جاده واقع است که میخواهیم بدون پیرون شدن از راه دوری آن دو را از هم جدا

بیایم برای این کار در دو نقطه از راه دو ساختمان A و B ازین دو دایره و نشان می‌کنیم. از نقطه

نخست (مثلاً کیلومتر ۳۵) A در ۳۵ جنوب باختری و B در ۶۷ جنوب خاوری دیده میشود

و از نقطه دوم (کیلومتر ۳۷) A در ۴۵ شمال باختری و B در ۲۷ شمال خاوری. حساب کنید

فاصله A را.

۵۱- از بالونی که در بلندی ۱۵۰۰ متر است نقطه ای از زمین گوشه شیب ۴۰ ۲۷

دیده میشود و اگر همین بالون با تندی یکمواخت شاغولی بالا رود پس از ۷ دقیقه همان نقطه با گوشه شیب

۱۸ ۴۵ دیده خواهد شد حساب کنید تندی بالون را بحسب کیلومتر در ساعت.

۵۲- محتمه ای به بلندی ۳۵ متر روی ستونی نصب است و پای آن ستون شخصی

به بلندی ۱۷۵ متر ایستاده است. از یک نقطه O که پای ستون در یک سمت افقی است محتمه

و آن شخص سر و بیک گوشه دیده می‌شوند بلند می‌شوند و حساب کنید. میدانیم O سی متر از پای ستون

دور است.

۵۲- برای یافتن بلند می‌توان یک کوه خطی، مبنای یک سیم AB افقی و شمالی جنوبی.

از A که در شمال است قله کوه در ۱۲ خاور شمالی و با گوشه فراز ۲۷ و ۳۵ دیده می‌شود و از B در ۱۹۲

شمال خاوری بلند می‌تواند کوه از AB چند راست؟

۵۳- از بلندترین نقطه‌های یک شنی که ۱۸ متر بالای آب است و شمالی یک فانوس دریایی

تا ۳۵ کیلوتری آن دیده می‌شود حساب کنید بلند می‌تواند فانوس دریایی را بفرض اینکه زمین کروی و پرتو

آن ۳۶۶ کیلومتر باشد.

بخش پنجم

بکار بردن مثلثات در نقشه برداری

۲۳- از روی ورزش های پیش (از صفحه ۹۳ تا ۱۰۵) دیده میشود که با سالی میتوان

دوری دو نقطه را از هم گیر و یا بلندی یک برج یا کوه و یا پهنای یک رودخانه را حساب کرد:

اگر میان دو نقطه A و B مانعی (مانند دریاچه، رودخانه یا تپه) باشد بطوریکه

نمائیم AB را مستقیماً اندازه بگیریم راه عمل چنانست که ورزش های ۶، ۹، ۱۳

۱۶، ۲۲، ۲۵، ۲۷ گشته شود.

و اگر هیچکدام از دو نقطه A و B دسترسی نداشته باشیم (مثل اینکه نخواهیم

از یک طرف رودخانه فاصله دو نقطه ای را که در طرف دیگر آن اندازه بگیریم) مانند ورزشهای

۱۷، ۲۷، ۴۴، ۵۰ عمل خواهیم نمود.

برای اندازه گرفتن بلندی یک برج اگر بتوانیم بپای برج برسیم راه عمل مانند ورزشهای

۱۰، ۱۱، ۳۵، ۴۹، ۵۲، ۵۴ است.

و اگر نتوانیم بپای برج برسیم (چنانکه در مورد قلعه کوه هسم نمی توان بپای آن رسید)،

ماند ورزش های ۱۹ ، ۴۵ ، ۵۲ عمل خواهیم نمود .

راه یافتن پنهانی رودخانه از ورزش های ۱۹ ، ۳۰ ، ۳۶ بدست می آید .

۲۴- مسئله نقشه - برای کشیدن نقشه یک زمین میتوان بر اثر عمل نمود :

نخت سه نقطه A و B و C از آن زمین را بر میگیرند بطوریکه بتوان CA

و CB و گوشه ACB را اندازه گرفت - بدین ترتیب جایی A و B و C نسبت یکدیگر

در روی نقشه معین میشود ، روشن است که فاصله ها عینا روی نقشه برده نمی شود و هر

مقیاسی دارد .

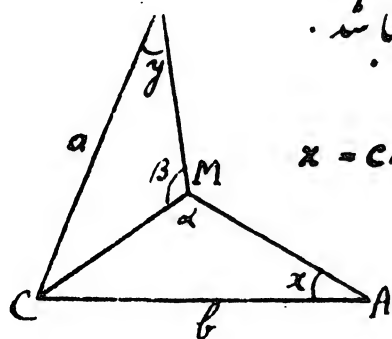
حال اگر بخواهند جای نقطه ای M را روی نقشه معین کنند با گوشه یاب

گوشه های AMC و CMB را اندازه میگیرند و از آن روابط گام دستوری

مثلثاتی اندازه AM و BM و CM را حساب می کنند: در روی نقشه نقطه M

نقطه برخورد سه دایره است که اندازه پرتوهای آنها برابر اندازه های AM و BM

و مرکز آنها ترتیب A و B و C میباشد .



برای محاسبه می پسیم اگر بتوانیم گوشه های $CAM = x$

و $y = CBM$ را حساب کنیم در هر یک از سه گوشه های

AMC و BMC دو گوشه یک پدش ساخته خواهد شد بنابرین پهلوهای AM و BM

و CM را از روی قضیه سینوسها حساب خواهیم کرد. حالت نخست انگشایش سه برتا،

اگر CA ، CB و ACB را به ترتیب ℓ ، α و C ، \widehat{AMC}

و \widehat{CMB} را α و β بنامیم برای محاسبه x و y نخست داریم:

$$(5) \quad x + y = 360^\circ - (\alpha + \beta + C)$$

پس در سه گوشه های AMC و CMB ترتیب دو بستگی زیر

$$\frac{\sin x}{CM} = \frac{\sin \alpha}{\ell}$$

$$\frac{\sin y}{CM} = \frac{\sin \beta}{a}$$

و از روی این دو بستگی چنین بر می آید.

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a \sin \alpha}{\ell \sin \beta}$$

و یا

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}}{\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{a \sin \alpha - \ell \sin \beta}{a \sin \alpha + \ell \sin \beta}$$

$$(D) \quad \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{a \sin \alpha - \ell \sin \beta}{a \sin \alpha + \ell \sin \beta} \cdot \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}$$

از دو معادله (D) و (5) x و y حساب شود.

متصوره - برای اینکه طرف دوم بچندی (D) محاسبه پذیر بالکاریم شود

بفرض اینکه $b \sin \beta > a \sin \alpha$ باشد میتوان $\frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha}$ را برابر سینوس

متمم گوشه ای φ گرفت

$$\frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha} = \cos \varphi$$

و خواهیم داشت:

$$\frac{a \sin \alpha - b \sin \beta}{a \sin \alpha + b \sin \beta} = \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$$

و باین (D) نوشته میشود:

$$\operatorname{tg} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}$$

خط محم فضلی

غلطنامه

درست	نادرست	سطر	صفحه
Arc sina	arc sina	۱۲	۴
$(1 + \sin x)$	$1 - \sin x$	۱۴	۱۳
۱	$\text{Cos}^2 x$	۵	۱۴
$\frac{1}{\text{Cos}^m a}$	$\frac{1}{\text{Cos}^2 a}$	۹	»
$\sin x$	sina	۱۱	»
$b +$	$b -$	۱۲	»
$2 \text{arc sin} x$	$\text{arc sin} x$	۶	۱۶
ξab	$2 ab$	۳	۱۷
$a^2 - b^2$	$a^2 - b^2$	۶	»
$\text{Cos}^2 x$	$\text{Cos}^2 x$	۱	۲۰
$\xi - 2 \sin^2 2x$	$\xi - \sin^2 2x$	۶	۲۰
23^-	24	۸	۲۸
$D = 27$	$D = 26$	۴	۳۱
$\text{Cos} x$	$\text{Cos} y$	۸	۴۴
$\sin \frac{y}{2}$	$\text{Cos} \frac{y}{2}$	۳	۴۵
(۳۶)	(۲۶)	۱۰	۴۰
(۳۷)	(۲۷)	۱۱	»
(۳۸)	(۲۸)	۱۲	»
(۳۹)	(۲۹)	۱۳	»

صفاحه	سطر	نا درست	درست
۶۴	۱	$(1 + \cos \alpha$	$(1 + \cos \alpha)$
۷۰	۴	بررا	سه بررا
۷۶	۸		$3,156 = b$
۷۷	۱۱	$\sin b$	$\sin B$
۹۳	۴	در طرف چپ نشانه =	باید S نوشت
۹۴	۱۳ - ۱۴	با نیروی نخست گوشه ۳۸°	
۱۰۴	۹	A	AB
۱۰۵	۱۰	متر	متری

سبقت پانہ
 جامعہ اسلامیہ
 ۱۔ ارکین بنی عیسیٰ علیہ السلام
 ۲۔ ساداتہ جاندہ عثمانیہ
 ۳۔ ارکین دارالترجمہ
 ۴۔ علیہ السلام
 ۵۔ علیہ السلام
 ۶۔ علیہ السلام
 ۷۔ علیہ السلام
 ۸۔ علیہ السلام
 ۹۔ علیہ السلام
 ۱۰۔ علیہ السلام
 ۱۱۔ علیہ السلام
 ۱۲۔ علیہ السلام
 ۱۳۔ علیہ السلام
 ۱۴۔ علیہ السلام
 ۱۵۔ علیہ السلام
 ۱۶۔ علیہ السلام
 ۱۷۔ علیہ السلام
 ۱۸۔ علیہ السلام
 ۱۹۔ علیہ السلام
 ۲۰۔ علیہ السلام
 ۲۱۔ علیہ السلام
 ۲۲۔ علیہ السلام
 ۲۳۔ علیہ السلام
 ۲۴۔ علیہ السلام
 ۲۵۔ علیہ السلام
 ۲۶۔ علیہ السلام
 ۲۷۔ علیہ السلام
 ۲۸۔ علیہ السلام
 ۲۹۔ علیہ السلام
 ۳۰۔ علیہ السلام
 ۳۱۔ علیہ السلام
 ۳۲۔ علیہ السلام
 ۳۳۔ علیہ السلام
 ۳۴۔ علیہ السلام
 ۳۵۔ علیہ السلام
 ۳۶۔ علیہ السلام
 ۳۷۔ علیہ السلام
 ۳۸۔ علیہ السلام
 ۳۹۔ علیہ السلام
 ۴۰۔ علیہ السلام
 ۴۱۔ علیہ السلام
 ۴۲۔ علیہ السلام
 ۴۳۔ علیہ السلام
 ۴۴۔ علیہ السلام
 ۴۵۔ علیہ السلام
 ۴۶۔ علیہ السلام
 ۴۷۔ علیہ السلام
 ۴۸۔ علیہ السلام
 ۴۹۔ علیہ السلام
 ۵۰۔ علیہ السلام
 ۵۱۔ علیہ السلام
 ۵۲۔ علیہ السلام
 ۵۳۔ علیہ السلام
 ۵۴۔ علیہ السلام
 ۵۵۔ علیہ السلام
 ۵۶۔ علیہ السلام
 ۵۷۔ علیہ السلام
 ۵۸۔ علیہ السلام
 ۵۹۔ علیہ السلام
 ۶۰۔ علیہ السلام
 ۶۱۔ علیہ السلام
 ۶۲۔ علیہ السلام
 ۶۳۔ علیہ السلام
 ۶۴۔ علیہ السلام
 ۶۵۔ علیہ السلام
 ۶۶۔ علیہ السلام
 ۶۷۔ علیہ السلام
 ۶۸۔ علیہ السلام
 ۶۹۔ علیہ السلام
 ۷۰۔ علیہ السلام
 ۷۱۔ علیہ السلام
 ۷۲۔ علیہ السلام
 ۷۳۔ علیہ السلام
 ۷۴۔ علیہ السلام
 ۷۵۔ علیہ السلام
 ۷۶۔ علیہ السلام
 ۷۷۔ علیہ السلام
 ۷۸۔ علیہ السلام
 ۷۹۔ علیہ السلام
 ۸۰۔ علیہ السلام
 ۸۱۔ علیہ السلام
 ۸۲۔ علیہ السلام
 ۸۳۔ علیہ السلام
 ۸۴۔ علیہ السلام
 ۸۵۔ علیہ السلام
 ۸۶۔ علیہ السلام
 ۸۷۔ علیہ السلام
 ۸۸۔ علیہ السلام
 ۸۹۔ علیہ السلام
 ۹۰۔ علیہ السلام
 ۹۱۔ علیہ السلام
 ۹۲۔ علیہ السلام
 ۹۳۔ علیہ السلام
 ۹۴۔ علیہ السلام
 ۹۵۔ علیہ السلام
 ۹۶۔ علیہ السلام
 ۹۷۔ علیہ السلام
 ۹۸۔ علیہ السلام
 ۹۹۔ علیہ السلام
 ۱۰۰۔ علیہ السلام

